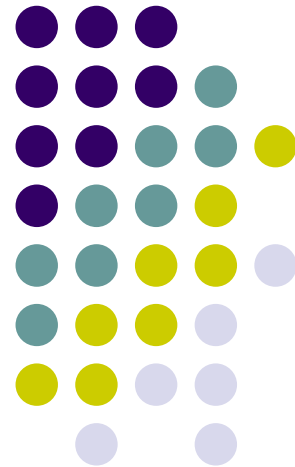


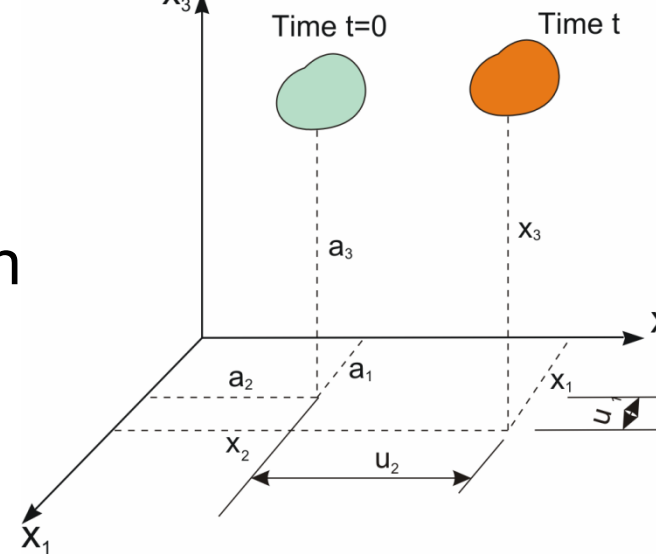
Hydraulika a Hydrológia

2. prednáška



Hydrodynamika

- Dva spôsoby štúdia pohybu kvapalín
 - Eulerov spôsob
 - Lagrangeov spôsob



Eulerov spôsob:

Pri Eulerovom spôsobe si zvolíme pevný bod v kvapaline (x_1, x_2, x_3) , a zisťujeme, ako sa veličiny (t. j. rýchlosť, tlak a teplota) menia, keď kvapalina prechádza týmto bodom. Potom súradnice sú pevné a veličiny sú obecné funkciami polohy a času.

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \quad p = p(x_1, x_2, x_3, t) \quad \text{Neustálené prúdenie}$$

Pre kvapaliny sa Eulerov spôsob používa najčastejšie.

Lagrangeov spôsob:

Zvolíme si časticu kvapaliny a sledujeme, ako sa častica pohybuje v čase a ako sa pritom menia aj veličiny (t. j. rýchlosť, tlak a teplota). Pritom sa mení aj poloha častice a teda aj súradnice bodu, v ktorom sledujeme prúdenie. Súradnice sú teda funkciami času:

$$x_i = a_i + u_i(a_1, a_2, a_3, t) \quad \text{kde } u \text{ je posunutie bodu}$$

Lagrangeov spôsob sa používa viac pre pevné látky.

Typy prúdenia

- Dve hlavné veličiny
 - Rýchlosť u – vektorová funkcia
 - Tlak p – skalárna funkcia

- Neustálené prúdenie

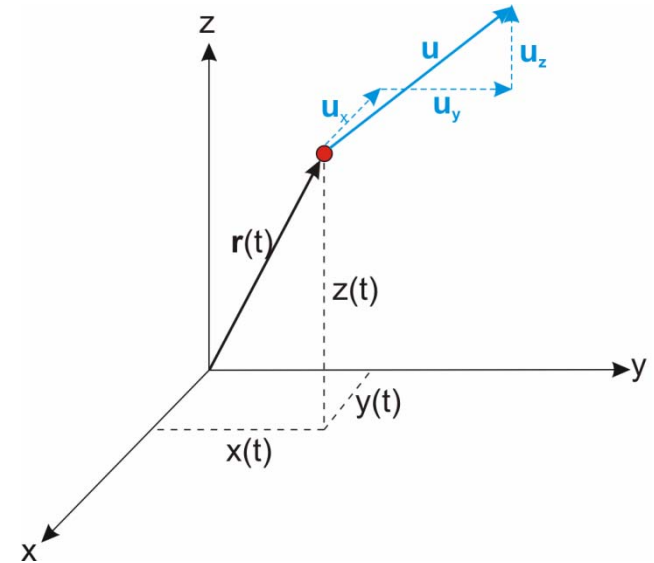
Obidve veličiny sú funkciami polohy a času:

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3, t) \quad p = p(x_1, x_2, x_3, t)$$

- Ustálené prúdenie

Obidve veličiny sú funkciami iba polohy:

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, x_2, x_3) \quad p = p(x_1, x_2, x_3)$$



Prúdnice

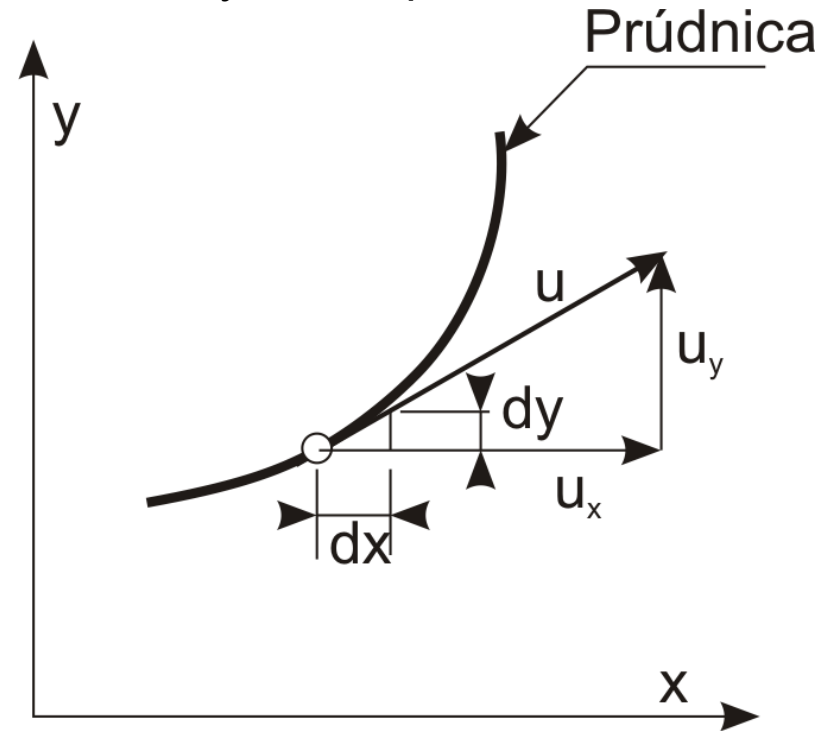
- Prúdnice

V každom bode prúdnice tvorí vektor rýchlosti dotyčnicu k prúdnici.
Čiže platí, že pre rovinné prúdenie je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y}{u_x}$$

- Trajektórie

Je to skutočná dráha častice kvapaliny.



Pre ustálené prúdenie sú trajektórie a prúdnice totožné.

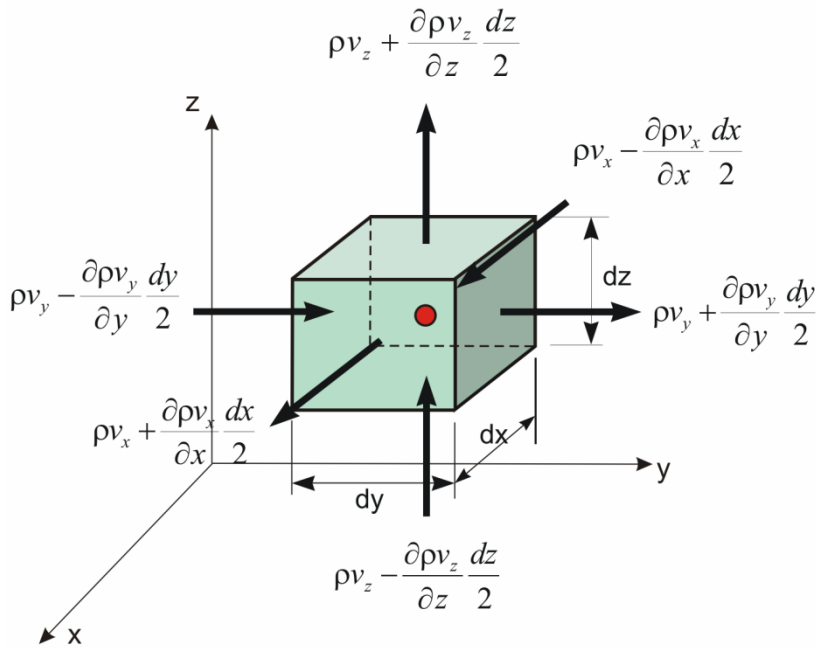
Základné rovnice hydrodynamiky



- Základné princípy:
 - Zákon o zachovaní hmoty
 - Zákon o zachovaní energie
 - Zákon o zachovaní momentov
- Dva tvary základných rovníc
 - diferenciálny tvar
 - integrálny tvar
- Kontrolný objem a kontrolný povrch
 - Kontrolný objem je objem kvapaliny, v ktorom skúmame zákonitosti pohybu a cez ktorý kvapalina preteká. Kontrolný povrch je potom povrch kontrolného objemu cez ktorý kvapalina vstupuje alebo vystupuje do alebo z kontrolného objemu.

Rovnica spojitosti (kontinuity)

- Je odvodená zo zákona o zachovaní hmoty
- Diferenciálny tvar rovnice:



Zmena hmoty v hranole

$$\Delta m = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dx dy dz$$

Bilancia prítokov a odtokov:

$$\sum Výtokov - \sum Prítokov = \Delta m$$



$$\left(\rho v_x + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \left(\rho v_y + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz + \left(\rho v_z + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy -$$

$$- \left(\rho v_x - \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(\rho v_y - \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\rho v_z - \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$



Rovnica spojitosti (kontinuity)

- Diferenciálny tvar (pokrač.)

$$\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Pre neustálené prúdenie a stlačiteľnú kvapalinu

Pre ustálené prúdenie a nestlačiteľnú kvapalinu platí, že $\rho = \text{konšt}$ a preto

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Rovnica spojitosti (kontinuity)



- Integrálny tvar

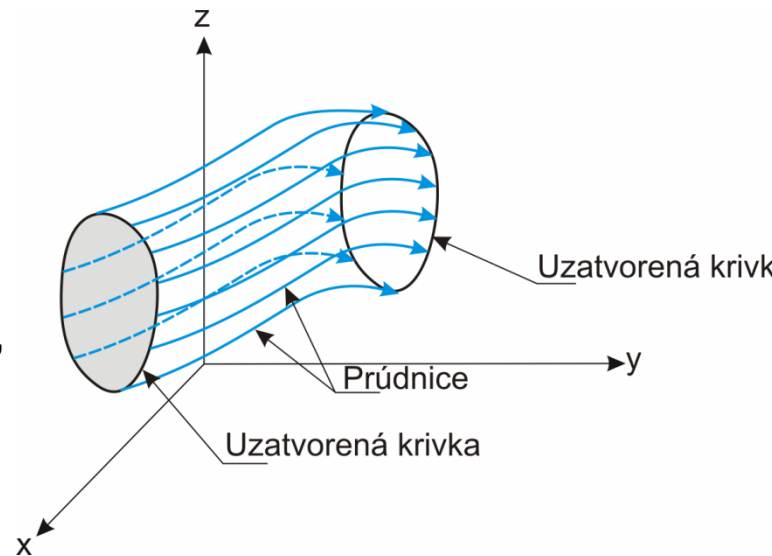
$$\sum Výtokov - \sum Prítokov = \Delta m$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV + \int_S (\rho \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0$$

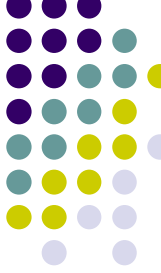
- Prúdová trubica

Sústava prúdnic, prechádzajúca bodmi uzatvorenej krivky.

Kvapalina vstupuje a vystupuje iba „čelom“, t.j. plochou, ohraničenou krivkou



Rovnica spojitosti (kontinuity)



- Prúdové vlákno
 - je to prúdová trubica spolu s kvapalinou vo vnútri tejto prúdovej trubice
- Pre nestlačiteľnú kvapalinu a ustálené prúdenie platí

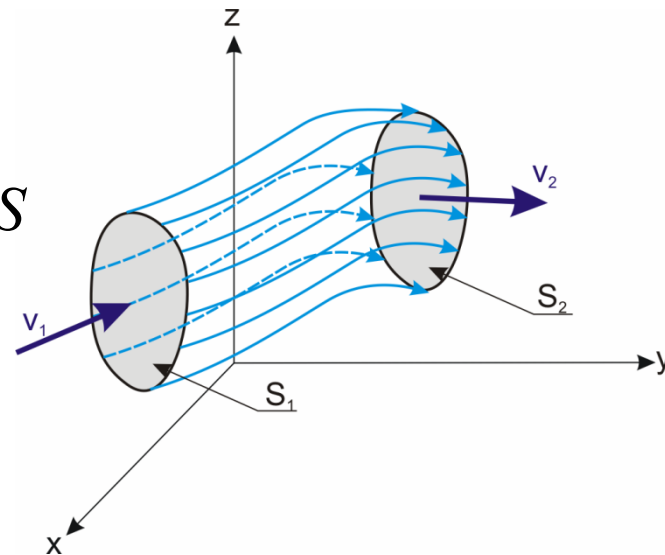
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \cdot dV = 0 \Rightarrow \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$$

- Pre prúdové vlákno $\vec{n} = 1$

Stredná (priemerná) rýchlosť

$$\vec{v} = \frac{1}{S} \int_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

$$S_1 \cdot \vec{v}_1 = S_2 \cdot \vec{v}_2$$



Bernoulliho rovnica



- Princíp zachovania energie

- Kinetická energia $E_K = \frac{1}{2}mu^2$

- Potenciálna energia $E_P = mgz$

- Vnútrotná energia $E_I = E_H + W$

- Celková energia

$$E = E_K + E_P + E_I = const$$

u – rýchlosť prúdenia

m – hmotnosť kvapaliny

z – výška nad danou úrovňou

E_H – tepelná energia

W – práca, vykonaná tlakom

Základné predpoklady odvodu Bernoulliho rovnice:

- (1) Ustálené prúdenie,
- (2) Nestlačiteľná kvapalina
- (3) Ideálna kvapalina (nulová viskozita)
- (4) Prúdové vlákno
- (5) Zanedbáme teplotné zmeny

Bernoulliho rovnica

- Rovnica energie

$$E = \frac{1}{2} m.u^2 + m.g.z + p.V = \text{konšt.}$$

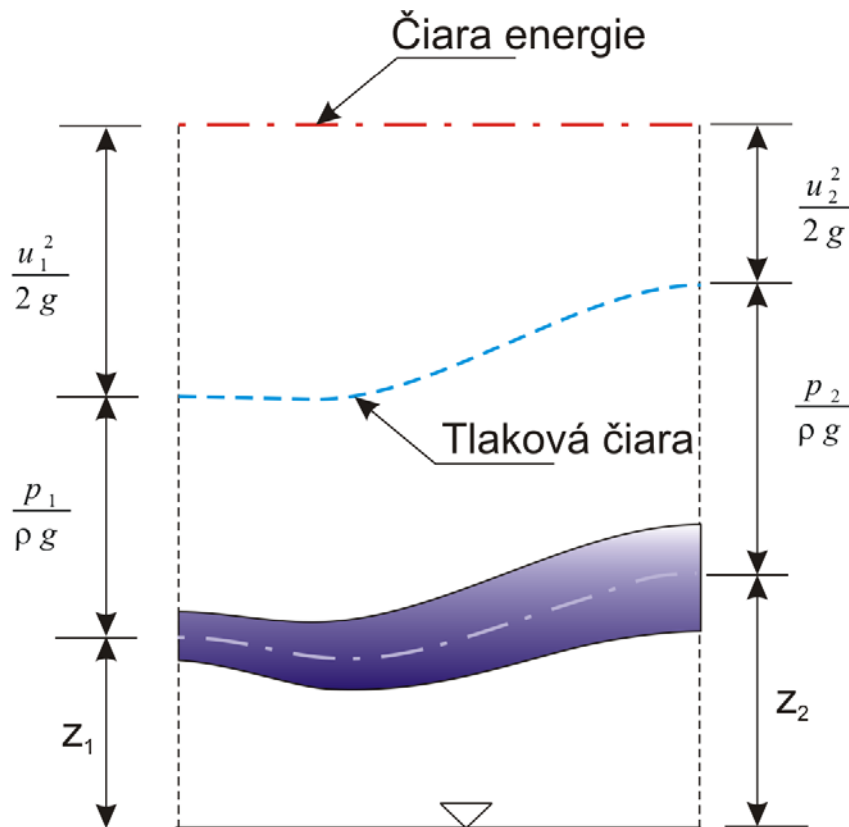
Kinetická

Potenciálna

Upravíme (delíme m.g)

$$\frac{u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho.g} = \text{konšt}$$

Práca tlaku



Bernoulliho rovnica

- Dôležité úpravy
 - Prechod k potrubí – úprava rýchlostnej výšky – Coriolisov koeficient α
 - Prechod k reálnej kvapaline – vplyvom trenia a vírenia vznikajú **straty** užitočnej energie

$$\frac{\alpha \cdot u^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \sum Z_i = \text{konšt}$$

Súčet stratových výšiek

