ANALÝZA GEODETICKÝCH MERANÍ

Predmetom vyrovnania sú v nadbytočnom počte odmerané veličiny, ktoré obsahujú iba náhodné chyby. Úlohou vyrovnávacieho počtu je:

1. Určiť kritériá na vylúčenie nespoľahlivých meraní, ktoré sú zaťažené hrubými chybami.
2. Z nadbytočných meraní určiť vyrovnanú (najpravdepodobnejšiu) hodnotu neznámej skutočnej hodnoty odmeranej veličiny.
3. Posúdiť presnosť výsledkov merania a určiť interval spoľahlivosti pre neznámu skutočnú hodnotu odmeranej veličiny.

Vyrovnávací počet predstavuje matematicko - štatistický aparát, ktorý finalizuje výsledky geodetických meraní číselnými charakteristikami. Ich analýza je podkladom na optimalizáciu merania, na voľbu vhodného prístrojového vybavenia i na výber metód spracovania výsledkov merania.

Vyrovnávací počet plní aj opačnú úlohu. Aké máme použiť prístrojové vybavenie a technológiu merania, aby sme docielili vyžadovanú presnosť merania. Sú to hlavne úlohy súvisiace s opakovanými meraniami a vytyčovaním.

Veličiny s ktorými pracujeme pri analýze geodetických meraní, ktoré majú význam:

$\mu = E(x) = X$ - (teoretická) stredná hodnota (skutočná, pravdepodobná hodnota meranej veličiny; $n \to \infty$),

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ - výberový priemer (priemerná hodnota, priemer vzorky meraní; i = 1, 2, ..., n),

$\sigma^2 = \bar{m}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2}{n-1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n}$ - variancia (variancia základného súboru), pre $n - 1 > 25$,

$v_i = \bar{x} - x_i$ - oprava,

$\varepsilon = X - x_i$ - chyba,

$\hat{\sigma}^2 = m^2$ - výberová variancia , pre $n - 1 \leq 25$,

$\sigma = \bar{m}$ - smerodajná odchýlka, základná stredná chyba,

$\hat{\sigma} = m$ - empirická stredná chyba (výberová stredná chyba, výberová smerodajná odchýlka).

<u>Poznámka</u>: Symbol X používame pri exaktne známej hodnote meranej veličiny. μ vyjadruje pravdepodobnú hodnotu meranej veličiny, ktorá bola určená vyrovnaním súboru s počtom odmeraných prvkov $n \to \infty$. σ^2 – je variancia náhodnej zložky chýb merania. $\bar{m}^2$ je variancia náhodnej aj systematickej zložky chýb merania ($\bar{m}^2 = \sigma^2 + c^2$). Keď použijeme symbol m – výberová (empirická) stredná chyba, súbor odmeraných veličín okrem náhodných chýb môže byť zaťažený aj systematickými chybami. $\hat{\sigma}$ – výberová smerodajná odchýlka v súbore meraní neobsahuje systematickú zložku chýb. Rovnosť medzi označenými veličinami znamená štatistickú rovnosť na určitej (zvolenej) hladine spoľahlivosti (konfidencie, napr. α = 0,05).

1. Najväčšia možná chyba a najväčšia dovolená chyba

Intervalový odhad u chýb je výpočet úhrnnej pravdepodobnosti, s akou **dopredu** očakávame výskyt chyby vo zvolenom intervale.

Pravdepodobnosť výskytu chýb v intervale $-t\sigma$, $+t\sigma$ a mimo tohto intervalu vyjadrená v percentách je nasledovná:

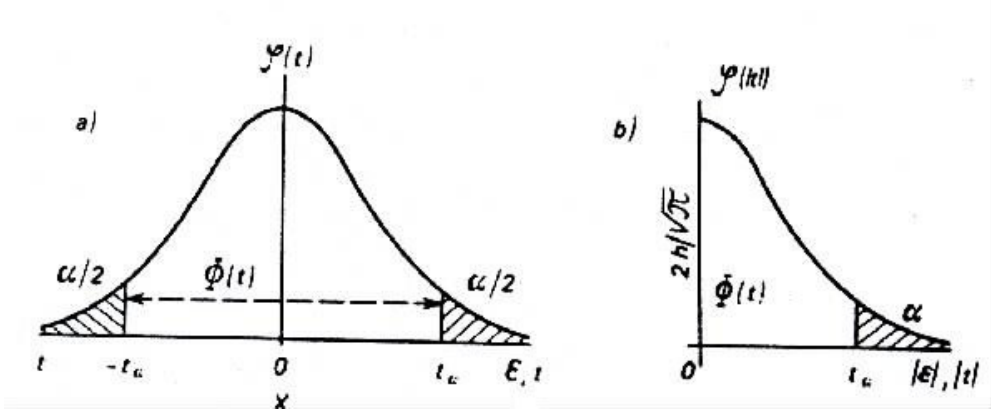
$P(-\sigma < \varepsilon < \sigma) = P(-1 < t < 1) = 68\%$, $\qquad P(|\varepsilon|) > \sigma = 32\%$,

$$P(-2\sigma < \varepsilon < 2\sigma) = P(-2 < t < 2) = 95\%\,, \qquad P(|\varepsilon|) > 2\sigma = 5\%\,,$$

$$P(-2{,}5\sigma < \varepsilon < 2{,}5\sigma) = P(-2{,}5 < t < 2{,}5) = 99\%\,, \qquad P(|\varepsilon|) > 2{,}5\sigma = 1\%\,,$$

$$P(-3\sigma < \varepsilon < 3\sigma) = P(-3 < t < 3) = 99{,}7\%\,, \qquad P(|\varepsilon|) > 3\sigma = 3\ ‰\,.$$

Uvedené pravdepodobnosti platia presne pre základný súbor s normálnym rozdelením a približne pre skutočné rozdelenie chýb. Uvedené intervaly sa volajú **intervaly spoľahlivosti (konfidencie)** (obr.1). V príslušnej pravdepodobnosti $\Phi(t)$ t (zvyčajne ho označujeme t_α) je **koeficient (hladina) spoľahlivosti**.



Obr.1. Interval spoľahlivosti $\pm\, t_\alpha$

Ak si zvolíme dostatočne široký interval $\pm\, t_\alpha\sigma$, ostáva len malá pravdepodobnosť α **(hladina významnosti, riziko)**, že chyba prekročí hranice $\pm\, t_\alpha\sigma$ (interval spoľahlivosti $E(x) \pm t_\alpha\sigma$). Pri zvolenej veľmi malej pravdepodobnosti α budeme s **praktickou (štatistickou) istotou** očakávať, že náhodná veličina (chyba) bude ležať v medziach príslušného intervalu spoľahlivosti. Inými slovami **riziko** α, že náhodná veličina prekročí **kritické hranice** $E(x) \pm t_\alpha\sigma$, je taká malá, že prekročenie kritickej hranice považujeme za **prakticky nemožné**.

Najväčšia prípustná chyba. Chyby nemôžu nadobudnúť neohraničene veľké hodnoty, ako ukazuje priebeh Gaussovej krivky. Hodnota $\varepsilon_{\max}$ je **najväčšia možná nevyhnutná chyba**. V praxi sa za najväčšiu prípustnú chybu považuje

$$|\varepsilon_\alpha| = t_\alpha\sigma = 2\sigma \text{ až } 3\sigma\,, \qquad |\varepsilon_\alpha| < \varepsilon_{\max}\,. \tag{1}$$

Výskyt chyby za kritickou hranicou $\pm\varepsilon$ má takú malú pravdepodobnosť α (0,05 – 0,003), že takú chybu považujeme za **hrubú chybu**. Kritické medze volíme spravidla $\pm t_\alpha = 2$.

2. Testovanie opráv odľahlých meraní

Najobtiažnejší, ale najčastejší prípad je, ak empirickú (výberovú) strednú chybu odhadujeme z malého súboru meraní ($n < 10$). Náhodné sú tu hodnoty jednotlivých meraní, priemeru i odhadu strednej opravy $m_v = \sqrt{\dfrac{\sum v^2}{n}}$. K testovaniu použijeme kritérium založené na rozdelení výberovej funkcie

$$W_{(n)} = \frac{\bar{x} - \ell_{(n)}}{m_v} = \frac{v_{(n)}}{m_v}, \quad \text{alebo} \quad W_{(1)} = \frac{\bar{x} - \ell_{(1)}}{m_v} = \frac{v_{(1)}}{m_v}, \quad P(W > W_\alpha) = \alpha\,, \tag{2}$$

kde m_v je odhad strednej opravy, čitateľ $v_{(n)}$ a $v_{(1)}$ sú krajné opravy, $\ell_{(1)}$ a $\ell_{(n)}$ sú najmenšie a najväčšie odmerané hodnoty. Odvodenie rozdelenia je zložité a vychádza zo skutočnosti, že pri danej základnej strednej chybe existujú horné a dolné hranice pre hodnoty W, závislé len na rozsahu výberu

n. V tabuľke 1 sú zostavené kritické hodnoty W_α pre hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$ (5 %).

Kritické hodnoty W_α Tabuľka 1

α	$n = 3$	4	5	6	8	9	10	11	12	15	20
0,05	W_α=1.41	1,69	1,87	2,00	2,17	2,23	2,29	2,34	2,39	2,49	2,62

Ak absolútna hodnota krajnej opravy presiahne hodnotu $W_\alpha\, m_v$, usudzujeme na pôsobenie hrubej alebo systematickej chyby a príslušné meranie zo súboru vylúčime. Test opakujeme pre ďalšiu krajnú opravu.

3. Test pravdepodobnosti, či odmeraný súbor meraní patrí do základného súboru pri známej variancii základného súboru

Predpokladajme, že x_1, x_2, ..., x_n sú nezávislé merania zo základného súboru s normálnym rozdelením $N\left(E(x) = \mu,\ \sigma^2 = \overline{m}^2\right)$, kde μ je teoretická stredná hodnota (skutočná, pravdepodobná hodnota) meranej veličiny. Známa je základná (štandardná) stredná chyba σ. Ak $\bar{x}$ patrí do súboru s normálnym rozdelením $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, pre x_i $(1 \le i \le n)$ platí

$\bar{x} \approx N\left(\mu, \sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ a druhá výberová funkcia $\dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ má normálne rozdelenie so strednou hodnotou a varianciou $N(0{,}1)$.

Pre hladinu významnosti α (riziko chybného rozhodnutia) dostaneme

$$P\left\{\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}\right| \le t_\alpha\right\} = 1 - \alpha \quad \text{alebo} \quad P\left\{\left|\bar{x} - \mu\right| \le c_1\right\} = 1 - \alpha, \tag{3}$$

kde t_α je kritická hodnota štandardného (základného) normálneho rozdelenia pre hladinu významnosti α a c_1 je

$$c_1 = t_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ . \tag{4}$$

Pri testovaní výberovej strednej hodnoty merania $\bar{x}$, či je štatisticky rovná teoretickej strednej hodnote $E(x) = \mu$, hodnotíme dve možné hypotézy:

nulová hypotéza H_0: $\bar{x} = \mu$,

alternatívna hypotéza H_1: $\bar{x} \ne \mu$.

Po zvolení hladiny významnosti α nájdeme kritickú hodnotu t_α z tabuľky Studentovho rozdelenia pre $n' = n - 1 = \infty$ a vypočítame c_1. Ak $\left|\bar{x} - \mu\right| < c_1$ prijmeme nulovú hypotézu H_0 na hladinu významnosti α. V opačnom prípade odmietneme H_0.

<u>Poznámka</u>: Od hodnoty $n' > 25$ sa kritické hodnoty normálneho rozdelenia a Studentovho rozdelenia prakticky rovnajú.

4. Test pravdepodobnosti, či odmeraný súbor meraní patrí do základného súboru pri neznámej variancii základného súboru

Vyhodnocujeme, či výberová stredná hodnota meraní je rovná teoretickej strednej hodnote μ za predpokladu, že základná stredná chyba $\overline{m} = \sigma$ je neznáma. Pre tento účel štatistického hodnotenia použijeme Studentovo t'- rozdelenie vyjadrené rovnicou

$$t' = \frac{\bar{x} - \mu}{m}\sqrt{n} \approx t'_{\alpha(n-1)} \ , \tag{5}$$

kde strednú hodnotu $\bar{x}$ a empirickú strednú chybu m vypočítame z rovníc

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \quad m^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \ . \tag{6}$$

Pri zvolenej hladine významnosti α dostaneme

$$P\left\{\frac{\bar{x} - \mu}{m}\sqrt{n} \le t'_{\alpha(n-1)} = 1 - \alpha\right\} \text{ alebo } \qquad P\left\{\left|\bar{x} - \mu\right| \le c_2\right\} = 1 - \alpha \ , \tag{7}$$

kde $t'_{\alpha(n-1)}$ je kritická hodnota t' rozdelenia s $n - 1$ stupňami voľnosti s hladinou významnosti α, c_2 je

$$c_2 = t'_{\alpha(n-1)}\frac{m}{\sqrt{n}} \ . \tag{8}$$

Pre zvolenú hladinu významnosti nájdeme kritickú hodnotu t'_α. Ak $\left|\bar{x} - \mu\right| < c_2$ prijímame nulovú hypotézu H_0. V opačnom prípade platí alternatívna hypotéza H_1.

5. Testovanie hypotézy o rovnosti variancií dvoch normálne rozdelených základných súborov

Testujeme hypotézu, že dve výberové variancie m_1^2 a m_2^2 z dvoch výberov o rozsahu n_1 a n_2 zodpovedajú výberom z dvoch základných súborov, pre ktoré platí rovnosť variancií, teda $\overline{m}_1^2 = \overline{m}_2^2$.

Testovacím kritériom bude veličina

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2} \ , \tag{9}$$

kde m_1 a m_2 sú výberové variancie, ktoré majú F-rozdelenie (Fisherové rozdelenie) s $n_1' = n_1 - 1$ a $n_2' = n_2 - 1$ stupňami voľnosti. Vo vzťahu (9) volíme vždy $m_1^2 > m_2^2$. Z tabuliek F-rozdelenia nájdeme pre zvolenú hladinu významnosti α kritickú hodnotu F_α na pravej strane rozdelenia (obojstranný test). Nulovú hypotézu budeme zamietať, ak $F > F_\alpha$.

6. Analýza variancií

Geodetické meranie, môže byť ovplyvnené rôznymi faktormi. Sú to: merací prístroj, merač, atmosferické podmienky, prostredie merania atď. Podľa vplyvu jednotlivých faktorov merania môžeme sériu meraní rozdeliť do skupín (napr. zmena merača, meranie iným prístrojom, meranie za iných atmosferických podmienok, iná etapa merania atď.). Analýzou variancií sa pokúšame vydedukovať, či rozdiely v skupinách meraní (napr. zmena merača, meranie iným prístrojom, meranie za iných atmosferických podmienok, iná etapa merania atď.), sú štatisticky významné, t.j. či skupiny meraní patria do spoločného základného súboru meraní. Je to možné vykonať internou analýzou variancií každej skupiny meraní a externou analýzou variancií medzi jednotlivými skupinami meraní. Ďalej je uvedená analýza variancií s účinkom vplyvu len jedného faktora zmeny podmienok meraní.

Predpokladajme, že v každom výsledku meraní $M_i\left(1 \le i \le m\right)$ sa prejavil vplyv faktora na skupinu n_i meraní ℓ_{ij} $\left(i \le j \le n_i\right)$ a všetky merania v každej skupine majú normálne rozdelenie s parametrami $N\left(\mu = E(l), \sigma^2\right)$.

Skupina	Meranie	Rozdelenie
M_1	$\ell_{11}\ \ell_{12}\ \ldots\ \ell_{1,n1}$	$N(\mu_1, \sigma^2)$,
M_2	$\ell_{21}\ \ell_{22}\ \ldots\ \ell_{2,n2}$	$N(\mu_2, \sigma^2)$,
...	...	...

(10)

M_i	$\ell_{i1}\ \ell_{i2}\ \dots\ \ell_{i,ni}$	$N(\mu_i, \sigma^2)$,
...	...	...
M_m	$\ell_{m1}\ \ell_{m2}\ \dots\ \ell_{m,nm}$	$N(\mu_m, \sigma^2)$.

Variancie počítame podľa vzťahov v tab. 2.

Tabuľka analýzy variancií Tabuľka 2

Typ variancii	Stupeň voľnosti	Súčet štvorcov	Variancie
Interná	n-m	$S_I^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\ell_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$	$\hat{\sigma}_I^2 = \dfrac{S_I^2}{n-m}$
Externá	m-1	$S_E^2 = \sum_{i=1}^{m} n_i\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2$	$\hat{\sigma}_E^2 = \dfrac{S_E^2}{m-1}$
Totálna	n-1	$S_T^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\ell_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$	$\hat{\sigma}_T^2 = \dfrac{S_T^2}{n-1}$

Z pomeru externej a internej variancie, získame nasledovné F - rozdelenie:

$$F_0 = \frac{\dfrac{S_E^2}{m-1}}{\dfrac{S_I^2}{n-m}} = \frac{\hat{\sigma}_E^2}{\hat{\sigma}_I^2} \approx F_{(m\text{-}1,\ n\text{-}m)}\ . \tag{11}$$

Nech $F_{\alpha\ (m\text{-}1,\ n\text{-}m)}$ znamená kritickú hodnotu F – rozdelenia s (m-1, n-m) stupňami voľnosti pri hladine významnosti α. Ak

$$F_0 > F_{\alpha\ (m\text{-}1,\ n\text{-}m)},$$

zamietame nulovú hypotézu H_0, čo znamená významný rozdiel medzi rôznymi skupinami meraní.

7. Test odmeranej polohovej zmeny

K testu odmeraného pohybu pozorovaných bodov (napr. na stavebných objektoch, na zosunoch) sa v geodézii využíva test hypotézy o rovnosti stredných hodnôt. Opakujme meranie priestorovej polohy $Z_i\,(y_i, x_i, H_i)$ značky P_i na objekte. Opakované meranie dá spravidla iné hodnoty $Z_{(i+1)}$ než predošlé meranie. Otázkou je, či zmeny $\Delta z = \Delta Z - \varepsilon_{\Delta z}$ vyplývajú zo skutočného pohybu stavby alebo sú produktom nevyhnutných meračských chýb pri nezmenenej polohe značky (stavby). Skutočná chyba odmeranej zmeny bude

$$\varepsilon_{\Delta z} = \Delta Z - \Delta z\ , \tag{12}$$

kde ΔZ značí skutočnú zmenu $\Delta Z = Z_2 - Z_1$, Δz odmeranú zmenu $\Delta z = z_2 - z_1$ a $\varepsilon_{\Delta z}$ je funkciou chýb pôvodných meraní. Položme „nulovú hypotézu“:

$$H_0:\quad \Delta Z = 0, \qquad \Delta z = -\varepsilon_{\Delta z}\ . \tag{13}$$

Ak by hypotéza platila, bol by odmeraný výsledok Δz len svojou skutočnou chybou. Vplyvom nevyhnutných chýb ε v meraniach bude chyba $\varepsilon_{\Delta z}$ a hodnota Δz mať vždy reálnu hodnotu, (aj keď $\Delta Z = 0$). Hodnota $\varepsilon_{\Delta z}$ však prakticky nemôže prekročiť určité hranice. Možné odmerané hodnoty budú mať normálne rozdelenie $N\left(\Delta Z, \sigma_{\Delta z}^2\right)$ a ich chyby budú mať tiež normálne rozdelenie $N\left(0, \sigma_{\Delta z}^2\right)$.

$$\Delta Z = E(\Delta z), \qquad \sigma_{\Delta z}^2 = \sigma_{z1}^2 + \sigma_{z2}^2\ , \tag{14}$$

kde σ_{z1}, σ_{z2} sú stredné chyby v prvom a druhom etapovom meraní.

Určíme interval podľa normálneho rozdelenia, pre normovanú premennú $t = \dfrac{\varepsilon_{\Delta z}}{\sigma_{\Delta z}}$

$$P\left(\left|\varepsilon_{\Delta z}\right| > t_\alpha \sigma_{\Delta z}\right) = P_{H0}\left(\left|\Delta z\right| > t_\alpha \sigma_{\Delta z}\right) = \alpha . \tag{15}$$

Pre prax platí zjednodušené pravidlo:

a) pri $\left|\Delta z\right| < \sigma_{\Delta z}$ nemôžeme zamietnuť hypotézu $\Delta Z = 0$ a pohyb bodu nie je meraním preukázaný,

b) pri $\sigma_{\Delta z} < \left|\Delta z\right| > 2\sigma_{\Delta z}$ môžeme pochybovať o platnosti hypotézy $\Delta Z = 0$ a môžeme pripustiť pohyb stavby s rizikom chybného rozhodnutia 32 % až 5 %.

c) pri $\left|\Delta z\right| > \sigma_{\Delta z}$ je hodnota Δz štatisticky významná a preto zamietneme hypotézu $\Delta Z = 0$ a sme prakticky presvedčení o pohybe bodu (stavby). Riziko chybného rozhodnutia nulovej hypotézy je 5 %.

Pri použití empirickej strednej chyby $m_{\Delta z}$ budú intervaly podľa Studentovho rozdelenia širšie $\left(n' = n_1' + n_2'\right)$.

8. Aplikácia zákona hromadenia chýb

Predpokladajme, že $x_1, x_2, \ldots x_n$ je n meraných veličín s náhodnými chybami $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Nech $\bar{x}_i$ sú skutočné (vyrovnané) hodnoty (nie náhodné hodnoty) meranej veličiny x_i. Platí

$$\varepsilon_i = x_i - \bar{x}_i . \tag{16}$$

V maticovom zápise rovnice (4.12) budú

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)} = \mathbf{x}_{(n,1)} - \bar{\mathbf{x}}_{(n,1)} , \tag{17}$$

kde

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} .$$

Predpokladáme, že ε má strednú hodnotu nula. Maticu variancií a kovariancií dostaneme

$$\mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon(n,n)} = E\left\{\left[\varepsilon - E(\varepsilon)\right]\left[\varepsilon - E(\varepsilon)\right]^{\mathbf{T}}\right\} = E\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} . \tag{18}$$

Vektor $\mathbf{x}$ bude mať rovnakú maticu variancií a kovariancií ako ε, pretože $\bar{x}$ nie je náhodná veličina

$$E(x) = E(\bar{x} + \varepsilon) = E(\bar{x}) = \bar{x} ,$$

$$\mathbf{C}_{xx} = E\left\{\left[x - E(x)\right]\left[x - E(x)\right]^{\mathbf{T}}\right\} = E\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\right) = \mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon(n,n)} . \tag{19}$$

Nech $\bar{y}$ predstavuje vyrovnanú funkciu veličiny

$$\bar{y} = a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + ... + a_n\bar{x}_n = \mathbf{a}\bar{\mathbf{x}}\,, \tag{20}$$

kde a_1, a_2, ... a_n sú konštanty alebo parciálne derivácie nelineárnej funkcie meranej veličiny definované vektorom $\mathbf{a}_{(1,n)} = (a_1, a_2 ... a_n)$. Odvodená hodnota y z meraní x_1, x_2, ... x_n je

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \mathbf{ax}\ . \tag{21}$$

Chyby ε_y vypočítame zo vzťahu

$$\varepsilon_y = y - \bar{y} = \mathbf{ax} - \mathbf{a}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{22}$$

Podľa definície variancie, variancia veličiny y bude

$$\sigma_y^2 = E\left(\varepsilon_y^2\right) = E\left[\mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{a}\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathbf{T}}\right] = \mathbf{a}E\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}\right)\mathbf{a}^{\mathbf{T}} = \mathbf{a}\mathbf{C}_{xx}\mathbf{a}^{\mathbf{T}} = (a_1\ a_2 ... a_n)\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Rovnica (23) vyjadruje **zákon hromadenia chýb funkcie** n náhodných premenných.

Ak ε_i a ε_j sú navzájom nezávislé veličiny, potom $\sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j;\ 1 \leq i, j \leq n)$ a dostaneme zvláštny prípad rovnice (23)

$$\sigma_y^2 = a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + ... + a_n^2\sigma_n^2\ , \tag{24}$$

ktorú interpretujeme ako zákon hromadenia (prenášania) stredných chýb funkcie n nezávislých náhodných premenných.

<u>Príklad 1</u>:

Dĺžka s = 260 m bola odmeraná 20 m oceľovým pásmom. Presnosť odmerania jedného 20 m úseku, za predpokladu pôsobenia len náhodných chýb z priradenia, preváženia pásma a rozmeru pásma, je m = 10 mm. Očakávaná stredná chyba celej dĺžky je:

$$m_s = m\sqrt{n} = 10\text{ mm}\sqrt{13} = 36\ \text{ mm}\ .$$

<u>Príklad 2:</u>

Vodorovný uhol bol odmeraný teodolitom nezávisle 4-krát. Stredná chyba vodorovného smeru je m_ψ=15^{cc} . Aritmetický priemer zo 4-och meraní vodorovného uhla má strednú chybu:

$$m_\omega = \frac{m_\psi\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{15^{cc}\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 10{,}6^{cc}\,.$$

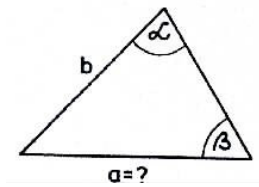
V rovnici čitateľ $m_\psi\sqrt{2}$ predstavuje strednú chybu jedenkrát odmeraného vodorovného uhla.

<u>Príklad 3:</u>

3.6 V trojuholníku boli odmerané dĺžka b a uhly α a β (obr. 2). Je potrebné určiť dĺžku a a jej strednú chybu m_a, ak merané veličiny a stredné chyby meraných veličín sú:

b = 192,03 m, m_b = 32 mm
α = 48,592^g , m_α = 15^{cc} ,
β = 67,021^g , m_β = 22^{cc} .

Najpravdepodobnejšia hodnota dĺžky a je: $a = b\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 152{,}80$ m.



Obr. 2. Merané veličiny v trojuholníku

Aplikáciou zákona hromadenia stredných chýb a po úprave parciálnych derivácií dostaneme:

$$m_a = a\sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \left(\cot g\,\alpha \frac{m_\alpha^{cc}}{\rho^{cc}}\right)^2 + \left(\cot g\,\beta \frac{m_\beta^{cc}}{\rho^{cc}}\right)^2} =$$

$$= 152{,}80 \quad m\sqrt{\left(\frac{0{,}032}{192{,}03}\right)^2 + \left(1{,}0452\frac{15^{cc}}{636620}\right)^2 + \left(0{,}5700\frac{22^{cc}}{636620}\right)^2} = 0{,}026 \text{ m.}$$

Dĺžka a môže s 95 % pravdepodobnosťou nadobúdať hodnoty v intervale: $152{,}74_8$ m < a < $152{,}85_2$ m.

9. Plánovanie presnosti merania

Významné využitie zákona hromadenia stredných chýb je v plánovaní presnosti merania. Vtedy aplikácia zákona hromadenia stredných chýb predstavuje obrátenú úlohu, v ktorej zisťujeme s akými strednými chybami je potrebné merať určujúce veličiny, aby stredná chyba funkcie m_F neprekročila určitú (dopredu stanovenú) hodnotu funkcie m_{Fmax}. K jednoznačnému riešeniu úlohy použijeme zásadu rovnakého vplyvu jednotlivých stredných chýb (alebo zásadu pomernej presnosti jednotlivých meraných veličín), prípadne použijeme empirické skúsenosti s meranými veličinami a varianciu strednej chyby funkcie m_F^2 rozdelíme rovnomerne (v určenom pomere) na jednotlivé merané veličiny vo funkcii F, napr.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \ell_1} m_1\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \ell_2} m_2\right)^2 = \ldots = \frac{1}{n} m_F^2, \tag{25}$$

kde n je počet meraných veličín.

<u>Príklad 4:</u>

Máme úlohu vytýčiť železničný oblúk s krajnými prechodnicami. S akou presnosťou máme vytyčovať body na oblúku aby sme neprekročili dovolené priečne a pozdĺžne odchýlky.

Nech celá dĺžka oblúka bude ≈ 400 m. Oblúk budeme vytyčovať z oboch koncových bodov priamych úsekov (ZP, KP). Podľa tab. 3 a 4 STN Vytyčovacie odchýlky stavebných objektov líniových a plošných, krajná pozdĺžna odchýlka na stykovom bode vytyčovania je U_{MVp} = 33 mm, priečna odchýlka je U_{MVq} = 20 mm. Oblúk s prechodnicami budeme vytyčovať v zlomkoch dĺžky oblúka po úsekoch $s \approx 20$ m. Aby sme s 95% spoľahlivosťou neprekročili krajné odchýlky, použijeme koeficient spoľahlivosti merania t_α = 2,0 (α = 0,05). Potom vytyčovacie odchýlky budú $m_p = U_{MVp} / t_\alpha$ = 16,5 mm, $m_q = U_{MVq} / t_\alpha$ = 10 mm.

Aplikáciou zákona hromadenia stredných chýb vypočítame vyžadovanú presnosť vytyčovania jednotlivých podrobných bodov oblúka podľa vzťahov: $m_p' = m_p / \sqrt{n}$ = 16,5 / $\sqrt{10}$ = 5,2 mm, $m_q' = m_q / \sqrt{n}$ = 10 / $\sqrt{10}$ = 3,1 mm.

S ohľadom na plochý tvar železničných oblúkov, na pozdĺžnu odchýlku vplýva vytyčovanie dĺžok, na priečnu odchýlku vytyčovanie uhlov. Vyžadovaná presnosť vytýčovania dĺžok bude 5 mm, vytyčovania uhlov $m_\omega = arctg\left(m_q' / 20\,m\right) = arctg\left(0{,}0031/20\right) = 0{,}01^g$.

<u>Záver analýzy:</u> Na vytyčovanie použijeme napr. pásmo a minútový teodolit. Vytýčené body budeme stabilizovať kolíkom s klinčekom.

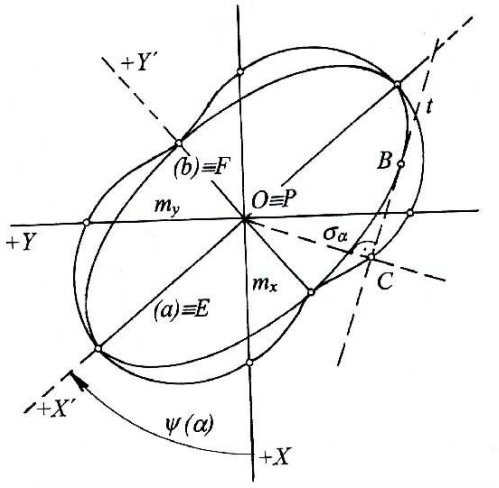
10. Elipsa chýb

Výsledkom vyrovnania MNŠ napr. polohy bodu sú súradnice bodu $P(y, x)$ a kovariančná matica

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{pmatrix} m_y^2 & m_{yx} \\ m_{xy} & m_x^2 \end{pmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{Q} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} Q_{yy} & Q_{yx} \\ Q_{xy} & Q_{xx} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

kde $\sigma_0^2 \equiv m_0^2$ znamená faktor jednotkovej variancie (jednotková kvadratická stredná chyba) a $\mathbf{Q}$ znamená maticu váhových koeficientov – kovariančnú maticu súradníc (y, x), ktorú predstavuje inverzná matica koeficientov normálnych rovníc $\mathbf{N}^{-1}$ – produkt vyrovnania metódou najmenších štvorcov.

Pomocou prvkov kovariančnej matice vieme vypočítať parametre elipsy chýb. Jej zobrazením vyjadríme najpravdepodobnejšiu polohu vyrovnaného bodu a oblasť spoľahlivosti vyrovnaných súradníc.



Obr. 3. Elipsa strednej chyby

11. Pravdepodobnosť polohy bodu vnútri elipsy chyby

Predpokladajme, že súradnice bodu $P(y, x)$ majú maticu variancií $\mathbf{C}_{xx}$ definovanú rovnicou (26).

Číselné hodnoty pravdepodobnosti p pre $t = 0, 1, 2, 3$ a 4 sú uvedené v tab. 3.

Pravdepodobnosť polohy bodu P vo vnútri elipsy chýb

Tabuľka 3

t	**P**
0	0,0000
1	0,3935
2	0,8647
3	0,9889
4	0,9997

Ak použijeme $t = 2$ tabuľku 3 môžeme interpretovať tak, že s 86% pravdepodobnosťou bod P bude na ploche dvojnásobného rozmeru poloosí elipsy polohovej chyby.