

bodov sa pretvoria na polárne súradnice (výpočty smerníkov a dĺžok strán) a k nim sa výpočtami pripoja merané polárne súradnice (uhly a dĺžky). Výsledné polárne súradnice sa znova prepočítajú na ortogonálne súradnice (výpočet súradníc nového bodu), ktoré predstavujú už hľadané súradnice novourčeného bodu.

### 6.3.1 Určenie excentricity cieľa (signálu)

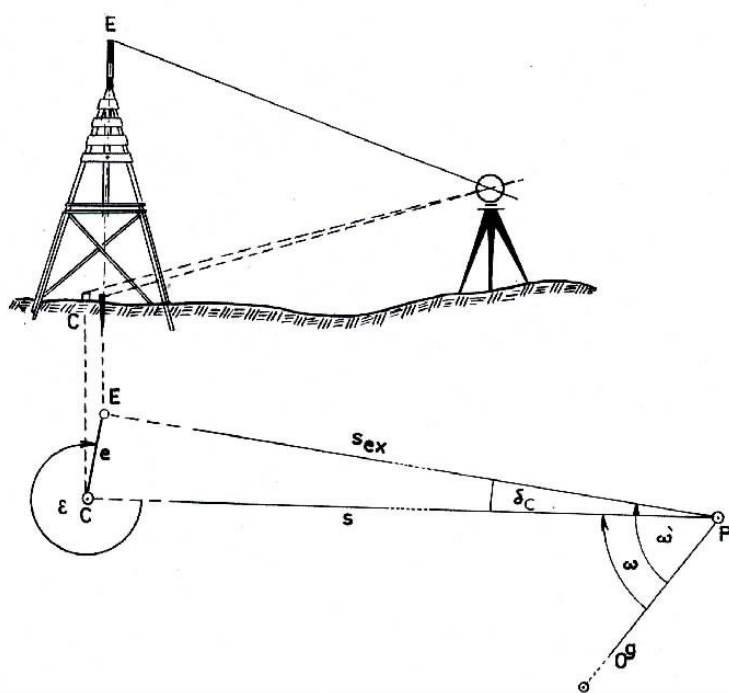
Meranie uhlov pri trigonometrickom určovaní súradníc bodov sa často uskutočňuje na body, ktorých cieľ (signál) nie je postavený centricky nad trigonometrickým bodom. Spravidla všetky dočasne signalizované body majú väčšiu alebo menšiu excentricitu cieľa, ktorú pred začatím geodetických prác musíme určiť, ak to vyžaduje presnosť merania.

Excentricitu cieľa určíme tak, že teodolitom v dvoch na seba kolmých smeroch premietneme do úrovne terénu špičku signálu meračskej stavby (pyramídy) (obr. 6.11). Premietnutý smer zaistíme na dvojiciach kolíkov značkami (klinčekmi). Priemet excentrického signálu predstavuje priesečník spojnic protíahlych značiek na kolíkoch. Potom odmeriame dĺžku excentricity  $e$  a centračný uhol  $\varepsilon$ .

Meraný uhol  $\omega'$  opravíme o centračnú zmenu  $\delta_c$  podľa rovnice:

$$\omega = \omega' - \delta_c, \quad (6.9)$$

keď  $\sin \delta_c = \frac{e}{s} \sin(400^g - \varepsilon)$  a  $s \approx s_{ex}$ .



Obr. 6.11. Určenie excentricity cieľa

V praxi sa často postupuje tak, že centračný uhol nepočítame, ale určíme súradnice excentrického cieľa a s nimi ďalej počítame.

Pri nasledujúcich výpočtoch budeme predpokladať, že meranie sa vykonávalo na ciele, u ktorých poznáme ich súradnice.

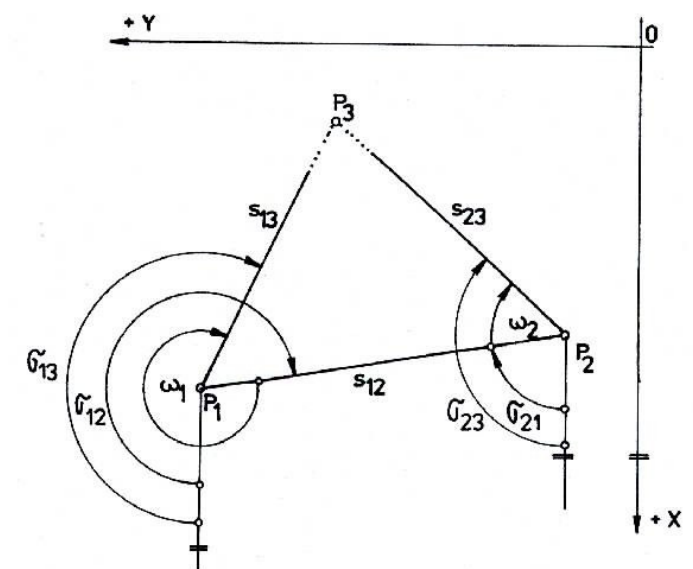
### 6.3.2 Pretínanie napred uhlami

Pretínanie napred je najvýhodnejšou trigonometrickou metódou na určenie súradníc nového bodu. Realizuje sa z bodov  $P_1(y_1, x_1)$  a  $P_2(y_2, x_2)$  na ktorých meriame uhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , určujúce polohu nového bodu  $P_3$ .

Súradnice bodu  $P_3(y_3, x_3)$  môžeme určiť niekoľkými spôsobmi. Jedno z riešení vyplýva podľa obr. 6.12.

Podľa vzťahov (6.4) a (6.6) vypočítame smerník  $\sigma_{12}$  a stranu  $s_{12}$ , vrátane príslušných kontrolných výpočtov:

$$\sigma_{12} = \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad s_{12} = \sqrt{\Delta y_{12}^2 + \Delta x_{12}^2}.$$



Obr. 6.12. Uhlové pretínanie napred

Ďalej vypočítame smerníky na určovaný bod  $P_3$ . Podľa obr. 6.12 majú hodnoty:

$$\sigma_{13} = \sigma_{12} + \omega_1 - 400^g \quad (6.10)$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{21} + \omega_2.$$

Sínusovou vetou vypočítame strany  $s_{12}$  a  $s_{23}$ :

$$s_{13} = s_{12} \frac{\sin \omega_2}{\sin[(400^g - \omega_1) + \omega_2]}$$

$$s_{23} = s_{12} \frac{\sin(400^g - \omega_1)}{\sin[(400^g - \omega_1) + \omega_2]}.$$

Hľadané súradnice bodu  $P_3$  vypočítame podľa rovníc (6.8):

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + s_{13} \sin \sigma_{13}, & x_3 &= x_1 + s_{13} \cos \sigma_{13} \\ y_3 &= y_2 + s_{23} \sin \sigma_{23}, & x_3 &= x_2 + s_{23} \cos \sigma_{23}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Pri programovom výpočte súradnice bodu  $P_3$  obvykle určujeme z rovníc:

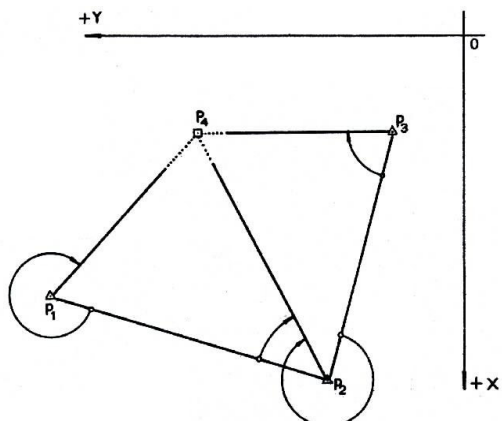
$$y_3 = y_1 + \frac{(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1) \cot g \sigma_{23}}{\cot g \sigma_{13} - \cot g \sigma_{23}} \quad (6.12)$$

$$x_3 = x_1 + (y_3 - y_1) \cot g \sigma_{13},$$

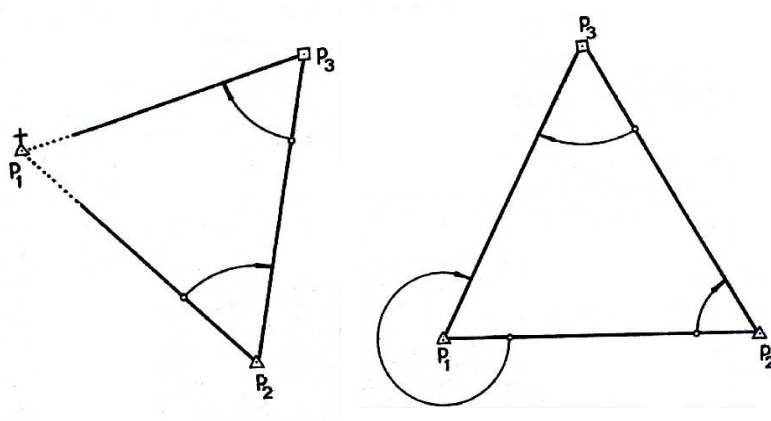
pričom príslušné funkcie  $\cot g \sigma$  nahradzujeme podielom funkcií  $\cos \sigma / \sin \sigma$ .

Vypočítané súradnice bodu  $P_3$  rovnicami (6.11), sa môžu líšiť najviac o 1 mm. Dvojitý výpočet súradníc neposkytuje absolútnu kontrolu určenia súradníc bodu  $P_3$ . Táto kontrola sa získa minimálne

z dvoch nezávislých kombinácií pretínania napred (obr. 6.13). Z vypočítaných súradníc sa vyčísluje empirická stredná chyba súradníc, ktorá sa porovnáva s prípustnou chybou pre tú – ktorú triedu presnosti určovaného bodu.



Obr. 6.13. Určenie súradníc bodu pretínaním napred s kontrolou (min. dva trojuholníky)



a/  
Obr. 6.14. Osobitné tvary pretínania napred

Osobitné tvary pretínania napred sú vyznačené na obr. 6.14a, b. Obr. 6.14a predstavuje tzv. pretínanie stranou a obr. 6.14b uhlové pretínanie napred s možnosťou vyrovnania odmeraných uhlov v trojuholníku.

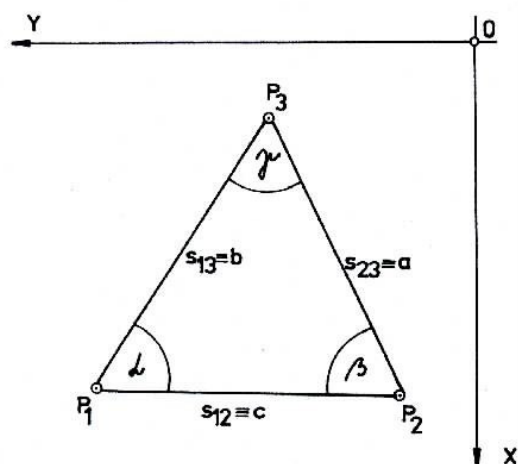
### 6.3.3 Pretínanie napred z dĺžok

Zavedením elektronických teodolitov do praxe sa v stále väčšej miere používa pretínanie napred z dĺžok.

Dané sú súradnice bodov  $P_1(y_1, x_1)$  a  $P_2(y_2, x_2)$ . Merajú sa dĺžky  $s_{13}$  a  $s_{23}$  (obr. 6.15). Po výpočte dĺžky  $s_{12}$ , hodnoty uhlov  $\alpha, \beta, \gamma$  vypočítame napr. Herónovým vzorcom:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}, \text{ keď } s = \frac{a+b+c}{2} \quad (6.13)$$

Po výpočte uhlov  $\alpha, \beta, \gamma$ , o ktorom platí  $\alpha + \beta + \gamma = 200^\circ$ , výpočet pokračuje rovnako ako pri pretínaní napred uhlami.



Účelnejší je výpočet uhlov cosínusovou vetou:

$$\alpha = \arccos \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\beta = \arccos \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

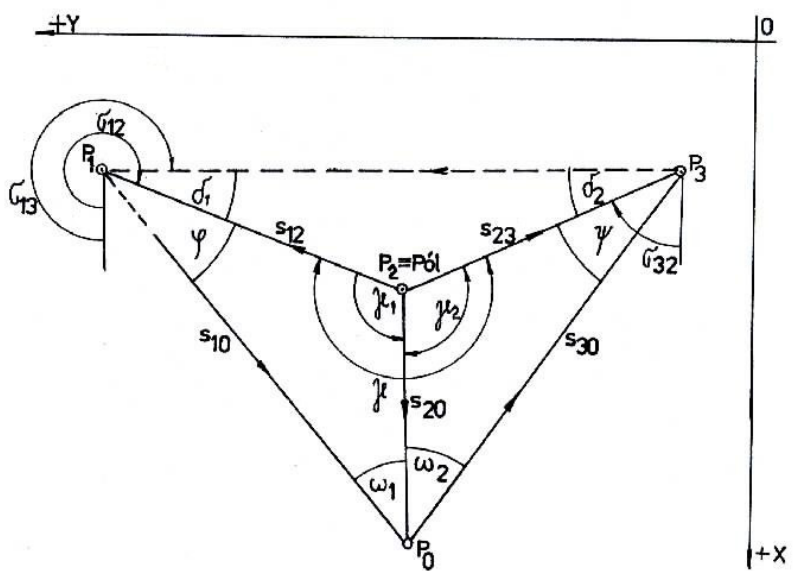
$$\gamma = \arccos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Kontrolne musí platiť  $\alpha + \beta + \gamma = 200^\circ$ . Odmeranie nadbytočného prvku, napr. uhla zrýchli výpočet a spresní určenie súradníc bodu  $P_3$ .

Obr. 6.15. Pretínanie napred z dĺžok

### 6.3.4 Pretínanie nazad (Pothenotova úloha)

Pretínanie nazad sa odlišuje od pretínania napred tým, že uhly meriame na určovanom bode  $P_0$  (obr. 6.16). Dané sú súradnice bodov  $P_1(y_1, x_1)$ ,  $P_2(y_2, x_2)$  a  $P_3(y_3, x_3)$  ako aj merané uhly  $\omega_1$  a  $\omega_2$ .



Obr. 6.16. Pretínanie nazad

Úloha sa účelne aplikuje v prípadoch, keď body  $P_1$ ,  $P_2$  a  $P_3$  sú trvalo signalizované (napr. veže kostolov, stožiare a pod.) a sú priaznivo rozložené na určenie bodu  $P_0$ . Pretínanie nazad používame tiež v prípadoch, keď nie je možné aplikovať pretínanie napred.

Riešenie úlohy má niekoľko variant, z nich naznačíme dve:

- pretínanie nazad pomocným uhlom,
- pretínanie nazad pomocným bodom.

#### 6.3.4.1 Pretínanie nazad pomocným uhlom

Základom úlohy je výpočet uhlov  $\varphi$  a  $\psi$ . Po ich určení pretínanie nazad prejde na už známy postup pretínania napred a z bodov  $P_1$ ,  $P_2$  a  $P_3$  trikrát určíme súradnice bodu  $P_0$  (obr. 6.16).

Úlohu riešime v poradí:

- 1, Podľa vzťahov (6.4) a (6.6) vypočítame smerníky  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  a  $\sigma_{32}$  a strany  $s_{12}$ ,  $s_{23}$ .
2. Uhol  $\gamma$  zovretý stranami  $s_{12}$  a  $s_{23}$  vypočítame z rozdielu smerníkov:

$$\gamma = \sigma_{21} - \sigma_{23} = \sigma_{12} - \sigma_{32}. \quad (6.14)$$

3. Uhly  $\varphi$  a  $\psi$  určíme z dvoch goniometrických vzťahov:

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 200^g - \frac{\gamma + \omega_1 + \omega_2}{2} = a \quad (6.15)$$

Druhý vzťah získame po úprave zo všeobecnej sínusovej vety. Ak vložíme do bodu  $P_2$  pól a vyznačíme orientáciu uhlov, rovnosmerné uhly budú  $\varphi$ ,  $\omega_2$ ,  $\delta_2$  a protismerné uhly budú  $\psi$ ,  $\omega_1$ ,  $\delta_1$ . Podiel sínusov neznámych uhlov  $\varphi$  a  $\psi$  vo všeobecnej sínusovej vete položíme rovný  $\cotg \mu$ :

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\sin \omega_1 \sin \delta_1}{\sin \omega_2 \sin \delta_2} = \frac{\sin \omega_1}{\sin \omega_2} \frac{s_{23}}{s_{12}} = \cot g\mu = \frac{1}{\operatorname{tg}\mu} . \quad (6.16)$$

V rovnici (6.16) sme aplikáciou jednoduchšej sínusovej vety nahradili  $\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{s_{23}}{s_{13}}$ . Rovnicu (6.16) upravíme tak, že najprv od nej odpočítame jednotku a potom pripočítame jednotku:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - 1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\mu} - 1 \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} + 1 = \frac{1}{\operatorname{tg}\mu} + 1 .$$

Obidve rovnice vzájomne predelíme a po úprave dostaneme:

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \psi + \sin \varphi} = \frac{1 - \operatorname{tg}\mu}{1 + \operatorname{tg}\mu} .$$

Rovnicu ďalej upravíme podľa trigonometrických vzorcov a vhodne dosadíme funkciu  $\operatorname{tg} 50^\circ$ , o ktorej platí  $\operatorname{tg} 50^\circ = 1$  :

$$\frac{2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cos \frac{\varphi + \psi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg}\mu}{\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg}\mu} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\mu + 50^\circ)} .$$

Po úprave dostaneme vzťah pre polovičný rozdiel uhlov  $\varphi$  a  $\psi$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cot g(\mu + 50^\circ), \quad (6.17)$$

z čoho vyplýva

$$\frac{\varphi - \psi}{2} = b . \quad (6.18)$$

Z rovnice (6.15) pre súčet uhlov  $\varphi$  a  $\psi$  a z rovnice (6.18) pre rozdiel uhlov vypočítame uhly  $\varphi$  a  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \varphi &= a + b, \\ \psi &= a - b . \end{aligned}$$

Počtárskou kontrolou určenia uhlov  $\varphi$  a  $\psi$  je výpočet uhla  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ , ktorý porovnávame s uhlom  $\gamma$  určeným rovnicou (6.14). Uhly  $\gamma_1$  a  $\gamma_2$  sú určené rovnicami:

$$\gamma_1 = 200^\circ - (\varphi + \omega_1) \quad \text{a} \quad \gamma_2 = 200^\circ - (\psi + \omega_2) . \quad (6.19)$$

**Poznámka:** Ak uhol  $\mu > 50^\circ$  uhly  $\varphi$  a  $\psi$  určíme z rovníc:

$$\varphi = a - b \quad \text{a} \quad \psi = a + b .$$

4. V trojuholníku  $P_1P_2P_0$  a  $P_2P_3P_0$  sínusovými vetami vypočítame dĺžky  $s_{10}$  a  $s_{30}$ . Dĺžku  $s_{20}$  vypočítame dvakrát:

$$\begin{aligned} s_{10} &= s_{12} \frac{\sin(\varphi + \omega_1)}{\sin \omega_1} = s_{12} \frac{\sin \gamma_1}{\sin \omega_1} \\ s_{30} &= s_{23} \frac{\sin(\psi + \omega_2)}{\sin \omega_2} = s_{23} \frac{\sin \gamma_2}{\sin \omega_2} \\ s_{20} &= s_{12} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_1} = s_{23} \frac{\sin \psi}{\sin \omega_2} . \end{aligned} \quad (6.20)$$

5. Uhly  $\varphi$  a  $\psi$  ďalej použijeme na výpočet smerníkov strán zo známych bodov na určovaný bod. Podľa obr. 6.16 smerníky  $\sigma_{10}$ ,  $\sigma_{20}$  a  $\sigma_{30}$  určíme z rovníc:

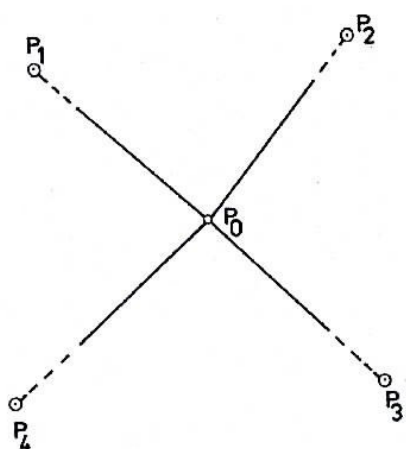
$$\sigma_{10} = \sigma_{12} + \varphi, \quad \sigma_{20} = \sigma_{21} - \gamma_1 = \sigma_{23} + \gamma_2, \quad \sigma_{30} = \sigma_{32} - \psi \quad (6.21)$$

Smerník  $\sigma_{20}$  určíme pre kontrolu dvakrát.

6. Súradnice nového bodu  $P_0$  vypočítame z rovníc:

$$\begin{aligned} y_0 &= y_1 + s_{10} \sin \sigma_{10} & x_0 &= x_1 + s_{10} \cos \sigma_{10} \\ y_0 &= y_2 + s_{20} \sin \sigma_{20} & x_0 &= x_2 + s_{20} \cos \sigma_{20} \\ y_0 &= y_3 + s_{30} \sin \sigma_{30} & x_0 &= x_3 + s_{30} \cos \sigma_{30} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Znamienka súradnicových prírastkov ( $\Delta y = s \sin \sigma$  a  $\Delta x = s \cos \sigma$ ) sa riadia podľa veľkosti smerníka  $\sigma$ . Ak sú rozdiely v súradniciach nového bodu signalizuje to na počtársku chybu. Rozdiely od strednej hodnoty by nemali byť väčšie ako  $\pm 1$  cm.



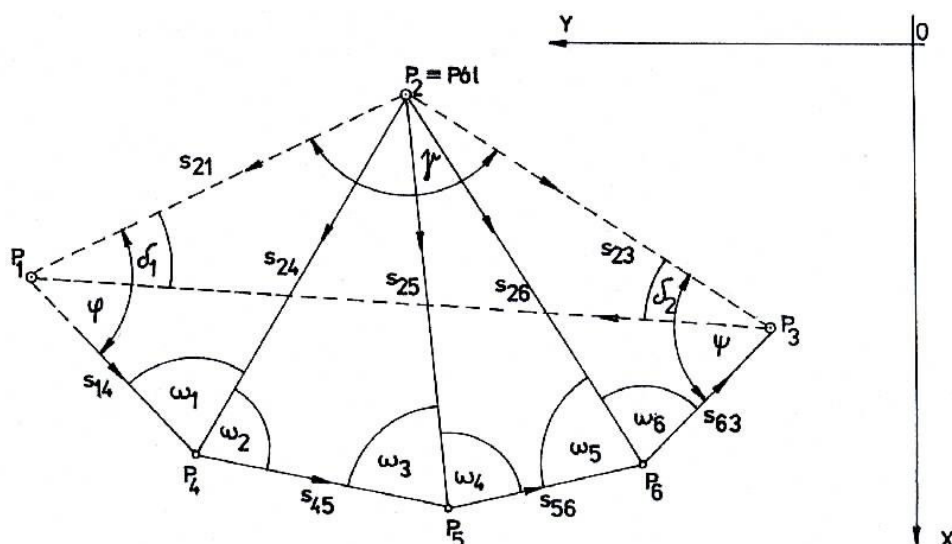
Obr. 6.17. Určenie bodu pretínaním nazad s kontrolou z viacerých kombinácií

Rovnako ako pri pretínaní napred zhodné súradnice v rovniciach (6.22) ešte nezaistujú správne určenie súradníc bodu  $P_0$ . Pri pretínaní nazad volíme najmenej štyri súradnicovo určené body, z ktorých sa na výpočet vyberajú vhodné trojice (kombinácie) bodov (obr. 6.17).

Minimálny počet kombinácií sú dve, doporučuje sa voliť tri kombinácie. Vo zvolených kombináciách nie je správne, ak sa opakuje za sebou dvojica bodov, napr. 1-2-3 a 1-2-4. Podľa obr. 6.17 mohli by sa zvoliť niektoré z kombinácií bodov 1-2-3, 2-3-4, 4-1-2, 3-4-1. Uhly  $\omega$  by v jednotlivých kombináciách nemali klesnúť pod  $20^\circ$  až  $30^\circ$ .

Ak v osnove smerov známe body majú rôznu presnosť, jednotlivé kombinácie zostavujeme okrem zohľadnenia rozloženia bodov aj tak, aby v trojici bodov bol len jeden s nižšou presnosťou (napr. kombinácia dvoch trigonometrických bodov a jedného bodu 1. triedy presnosti), čím aritmetickým priemerom z novourčených súradníc získame najpravdepodobnejší odhad súradníc nového bodu  $P_0$ .

#### 6.3.4.2 Rozšírené pretínanie nazad



Obr. 6.18. Rozšírené pretínanie nazad

Pretínanie nazad podľa predchádzajúceho postupu môžeme rozšíriť na výpočet súradníc aj viac ako jedného bodu.

Na obr. 6.18 je ukážka určenia súradníc troch nových bodov. Dané sú súradnice bodov  $P_1, P_2, P_3$ . Máme určiť súradnice bodov  $P_4, P_5, P_6$ , ak na týchto bodoch boli odmerané uhly  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$ .

Uhly  $\varphi$  a  $\psi$  určíme analogicky ako pri pretínaní nazad. Zvolením pólu v bode  $P_2$  vyznačením orientácie uhlov dostaneme rovnosmerné uhly:  $\varphi, \delta_2, \omega_2, \omega_4, \omega_6$  a protismerné uhly:  $\psi, \delta_1, \omega_5, \omega_3, \omega_1$ . Po nahradení  $\sin \delta_1 : \sin \delta_2 = s_{23} : s_{12}$  zo všeobecnej sínusovej vety pre podiel sínusov uhla  $\varphi$  a  $\psi$  vypočítame uhol  $\mu$ :

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{s_{23} \sin \omega_1 \sin \omega_3 \sin \omega_5}{s_{12} \sin \omega_2 \sin \omega_4 \sin \omega_6} = \cot g \mu, \quad (6.23)$$

ktorý dosadíme do rovnice (6.16):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi - \psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \psi}{2} \cot g(\mu + 50^\circ), \quad \frac{\varphi - \psi}{2} = b, \quad (6.24)$$

keď podľa obr. 6.18

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{800^\circ - (\gamma + [\omega])}{2} = a \quad \text{a} \quad \gamma = \sigma_{21} - \sigma_{23}. \quad (6.25)$$

Uhly  $\varphi$  a  $\psi$  vypočítame ako pri pretínaní nazad z rovníc (6.24) a (6.25).

Súradnice bodov  $P_4, P_5$  a  $P_6$  môžeme vypočítať postupným pretínaním napred, alebo polygónom.

Postupné pretínanie napred aplikujeme tak, že pretínaním napred z trojuholníka  $P_1P_2P_4$  určíme súradnice bodu  $P_4$  a z trojuholníka  $P_4P_2P_5$  určíme súradnice bodu  $P_5$ . Obdobne sa postupuje z druhej strany a z trojuholníka  $P_2P_3P_6$  určíme súradnice bodu  $P_6$  a z trojuholníka  $P_2P_6P_5$  druhej súradnice bodu  $P_5$ . Z dvojitého určenia súradníc bodu  $P_5$  sa určí aritmetický priemer.

Pri určení súradníc bodov  $P_4, P_5, P_6$  polygónom, jeden nadbytočný prvok umožní vyrovnanie polygónu, ako je to ukázané pri výpočte polygónov v kap. 6.441.

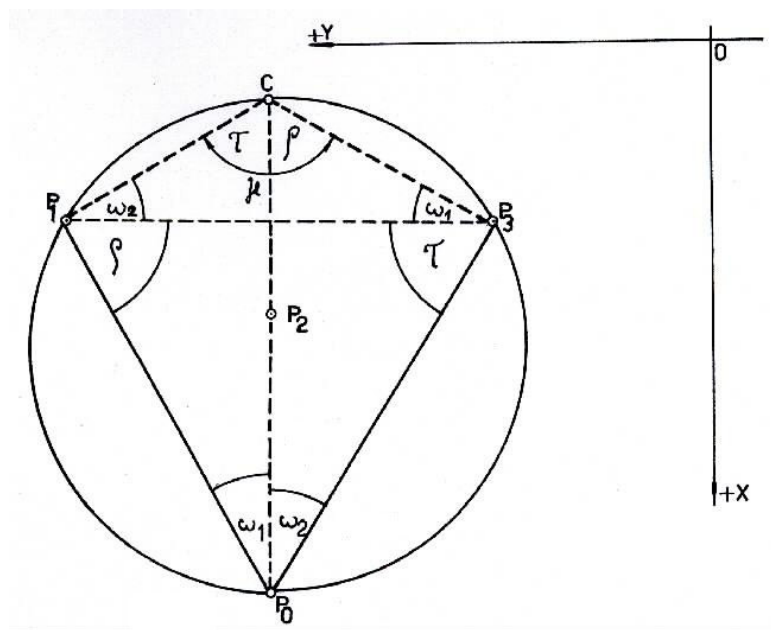
Vrcholové uhly v polygóne budú:  $\varphi, (\omega_1 + \omega_2), (\omega_3 + \omega_4), (\omega_5 + \omega_6)$  a  $\psi$ . Dĺžky strán  $s_{14}, s_{45}, s_{56}, s_{63}$  vypočítame postupne aplikovaním sínusovej vety:

$$\begin{aligned}
s_{14} &= s_{12} \frac{\sin(\varphi + \omega_1)}{\sin \omega_1}, & s_{24} &= s_{12} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_1}; \\
s_{45} &= s_{12} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_1} \cdot \frac{\sin(\omega_2 + \omega_3)}{\sin \omega_3}, \\
s_{25} &= s_{12} \frac{\sin \varphi}{\sin \omega_1} \cdot \frac{\sin \omega_2}{\sin \omega_3} \text{ atď.}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Dĺžku  $s_{23}$  v poslednom trojuholníku vypočítame aj zo súradníc bodov  $P_2$  a  $P_3$ , čím sa zaistí počtárska a meračská kontrola riešenej úlohy.

#### 6.3.4.3 Pretínanie nazad pomocným bodom

Výpočtom pretínania nazad pomocným bodom (Collinsovým bodom) sa vyhneme určovaniu uhlov  $\varphi$  a  $\psi$  a úloha sa nám rozpadáva na tri pretínania napred (6.19). Z trojuholníka  $P_3P_1C$  pretínaním napred určíme súradnice pomocného bodu  $C$  a z trojuholníkov  $CP_1P_0$  a  $P_3CP_0$  súradnice bodu  $P_0$ . Pomocný bod  $C$  sa nachádza na kružnici v predĺžení spojnice  $P_0P_2$ , ktorá sa preložila bodmi  $P_1P_0P_3$ . Pri výpočte súradníc bodu  $C$  využijeme poučku o rovnosti obvodových uhlov nad spoločnou tetivou.



Obr. 6.19. Výpočet pretínania nazad pomocným bodom

Z rozdielov smerníkov určíme uhly  $\tau$  a  $\rho$ :

$$\tau = \sigma_{C1} - \sigma_{C2} \quad \rho = \sigma_{C2} - \sigma_{C3} \tag{6.27}$$

a uhol

$$\gamma = \sigma_{C1} - \sigma_{C3} = \tau + \rho. \tag{6.28}$$

Uhly  $\tau$  a  $\rho$  využijeme pri pretínaní napred na určenie súradníc bodu  $P_0$ , tak ako je to znázornené na obr. 6.19.

Úloha pretínania nazad pomocným bodom je neriešiteľná, ak bod  $P_2$  sa blíži k bodu  $C$ , t.j. ak body  $P_1, P_2, P_3$  a  $P_0$  ležia v blízkosti kružnice. Polohu bodu  $P_2$  vo vzťahu ku kružnici posúdime výpočtom vzdialenosti  $s_{P2C}$ .



## 6.4 ZHUSTŔOVANIE BODOVÉHO POĽA POLYGÓNMÍ

Polygóny tvoria geometrickú sieť, na ktorú pripájame podrobné meranie, alebo z ktorej vytyčujeme. Vkladajú sa medzi súradnicovo známe body polohového bodového poľa.

Polygóny sú určené nadbytočnými prvkami, pomocou ktorých kontrolujeme správnosť merania a vyrovnávame nevyhnutné meračské chyby.

V polygónovej sieti meriame dĺžky strán a ľavostranné uhly. Uhly a dĺžky sa môžu získať s rôznym stupňom vzájomnej presnosti. V záujme hospodárnosti merania a presnosti určenia súradníc polygónových bodov vyžadovanú presnosť merania uhlov a dĺžok vymedzujú príslušné smernice.

### 6.4.1 Rozdelenie polygónov

Polygóny rozdeľujeme podľa rôznych hľadísk:

Podľa geometrického tvaru delíme polygóny na uzavreté a otvorené. Uzavreté polygóny majú tvar podľa obr. 6.20, používajú sa len na osobitné účely. Otvorené polygóny majú v praxi najširšie uplatnenie.