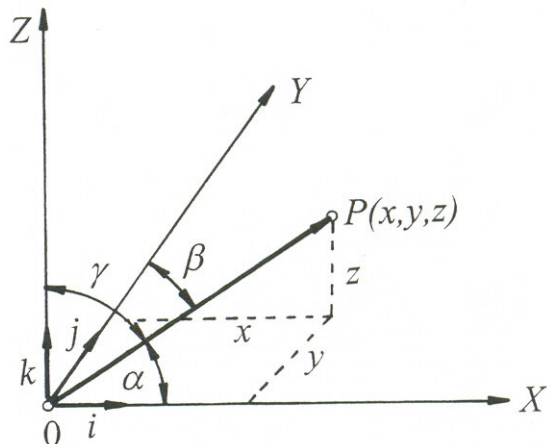


11. MATEMATICKÉ ZÁKLADY ANALYTICKEJ FOTOGRAMETRIE

Fotogrametrickú snímku vyhotovenú fotogrametrickým objektívom (so zanedbateľným skreslením) s dobrým priblížením považujeme za perspektívny obraz objektu. Body objektu a im zodpovedajúce snímkové body sú v okamihu vyhotovenia snímky v perspektívnom vzťahu, ktorý je možné vyjadriť aj matematicky. Perspektívny vzťah formulujeme matematicky podľa poučiek analytickej geometrie v priestore, vzhľadom na definovaný súradnicový systém. Aplikujeme ho v analytickej a digitálnej fotogrametrii.

11.1 Priestorový súradnicový systém

Súradnicový systém v analytickej fotogrametrii je pravouhlý a pravotočivý. Pravotočivosť pravouhlého súradnicového systému je daná trojicou usporiadaných jednotkových vektorov \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} daných ich poradím.



Jednotkové vektory \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} pritom definujú smery priestorových súradnicových osí X , Y , Z (obr. 11.1). Pre jednotkové vektory \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} z definície skalárneho súčinu vektorov platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} &= 0, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} &= 0, & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0, & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Obr. 11.1 Priestorový súradnicový systém

Ak vyjadríme polohu bodu P pomocou vektora \mathbf{r} v systéme jednotkových vektorov \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} s počiatkom v bode O , potom pre vektor \mathbf{r} (obr.11.1) platí:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (11.2)$$

kde x , y , z sú ortogonálne zložky vektora \mathbf{r} , resp. priestorové súradnice bodu P .

Vzťah (11.2) možno formálne zapísať ako súčin riadkového vektora x, y, z a stĺpcového vektora $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ takto:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix}. \quad (11.3)$$

Pre zjednodušenie vektorového vyjadrovania budeme pre vektor \mathbf{r} používať najmä jednoduchší stĺpcový zápis:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

11.2 Matematická formulácia podmienky kolinearit v analytickej fotogrametrii

Vzťah medzi súradnicami v geodetickom a snímkovom súradnicovom systéme určitého bodu je definovaný podmienkou kolinearit (projekčné centrum, snímkový bod a zodpovedajúci bod na teréne ležia na jednej priamke) (obr. 11.2)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_p = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{A} \mathbf{r}' , \quad (11.5)$$

kde je

$\mathbf{r}_{0(3,1)}$ - vektor priestorových súradníc projekčného centra $O(x_0, y_0, z_0)$,

$\mathbf{r}_{(3,1)}$ - vektor priestorových súradníc bodu $P(x, y, z)$,

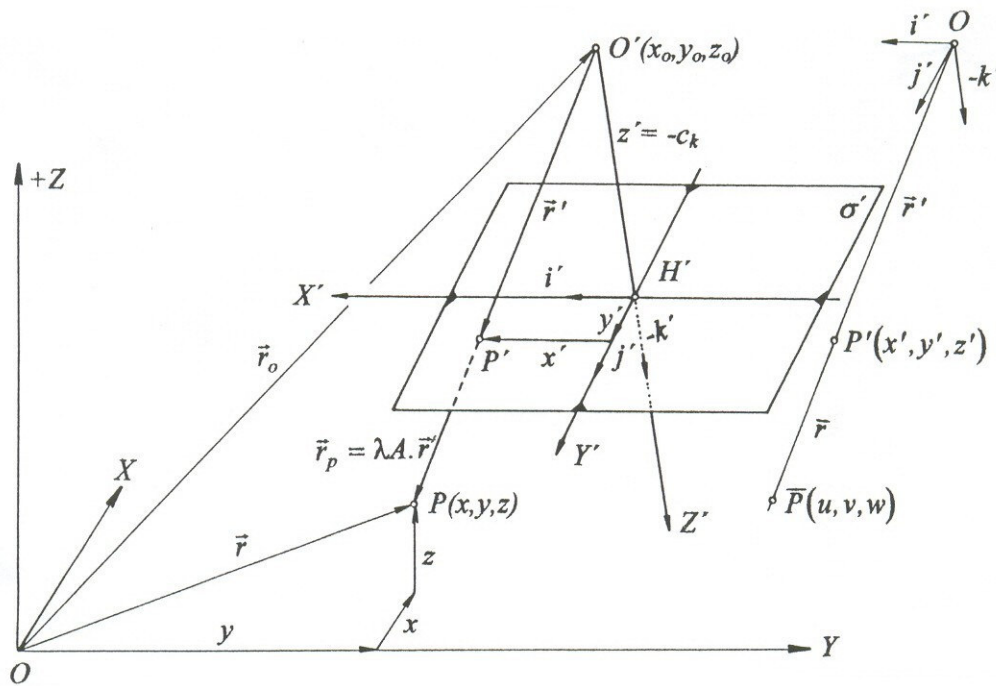
λ - mierkový koeficient (skalár),

$\mathbf{r}'_{(3,1)}$ - obrazový vektor súradníc bodu vzhľadom na hlavný snímkový bod

$$P(x' - x'_H, y' - y'_H, z' = -c_k),$$

$\mathbf{A}_{(3,3)}$ - matica smerových kosínusov (rotačných koeficientov), ktorá určuje uhlovú orientáciu medzi geodetickým a snímkovým súradnicovým systémom podľa schémy uvedenej v tab. 11.1.

Predpokladáme súčasne, že $H' \equiv S'$ a $x'_H = y'_H = 0$.



Obr. 11.2. Kolinéarny vzťah určitého bodu v geodetickom a snímkovom súradnicovom systéme

Matica smerových kosínusov			Tabuľka 11.1			
	x'	y'	z'	x'	y'	z'
x	$\cos \alpha_x$	$\cos \alpha_y$	$\cos \alpha_z$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	$\cos \beta_x$	$\cos \beta_y$	$\cos \beta_z$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	$\cos \gamma_x$	$\cos \gamma_y$	$\cos \gamma_z$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Prijatím $z' = c_k$ vznikne zhodne orientovaný fotogrametrický systém s geodetickým súradnicovým systémom. Zmena ovplyvňuje znamienka funkcií troch rotačných uhlov φ , ω , κ , z ktorých vypočítame smerové kosínusy [9]:

$$\cos \alpha_x = -\cos \kappa \cos \varphi - \sin \kappa \sin \varphi \cos \nu,$$

$$\cos \alpha_y = \sin \kappa \cos \varphi - \cos \kappa \sin \varphi \cos \nu,$$

$$\begin{aligned}
\cos \alpha_z &= -\sin \varphi \sin \kappa, \\
\cos \beta_x &= \cos \kappa \sin \varphi - \sin \kappa \cos \varphi \cos \nu, \\
\cos \beta_y &= -\sin \kappa \sin \varphi - \cos \kappa \cos \varphi \cos \nu, \\
\cos \beta_z &= -\cos \varphi \sin \nu, \\
\cos \gamma_x &= -\sin \kappa \sin \nu, \\
\cos \gamma_y &= -\cos \kappa \sin \nu, \\
\cos \gamma_z &= \cos \nu,
\end{aligned} \tag{11.6}$$

kde $\nu = 100^\circ - \omega$.

Obrazový vektor v explicitnom vyjadrení má tvar:

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{11.7}$$

Ak vynásobíme rovnicu (11.7) skalárne jednotkovým vektorom \mathbf{k}' v snímkovom súradnicovom systéme a v zmysle rovnice (11.1) dosadíme za $\mathbf{r}'\mathbf{k}' = \mathbf{z}'$ dostaneme:

$$\mathbf{z}' = \frac{1}{\lambda} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{k}'. \tag{11.8}$$

Pre mierkový koeficient $\frac{1}{\lambda}$ platí:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{z'}{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{k}'} . \tag{11.9}$$

Rovnicu (11.9) dosadíme do rovnice (11.7) a dostaneme:

$$\mathbf{r}' = \frac{z'}{\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{k}'} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{11.10}$$

Rovnicu (11.7) prepíšeme na tvar

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \lambda \mathbf{r}'. \tag{11.11}$$

Pravá strana rovnice $\lambda \mathbf{r}'$ je vektor, ktorý dostaneme tak, že snímkový vektor \mathbf{r}' vynásobíme mierkovým koeficientom λ bez ohľadu na tvar matice smerových kosínusov \mathbf{A} .

Vektor $\lambda \mathbf{r}'$ označíme symbolom $\bar{\mathbf{r}}$

$$\bar{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{r}' .$$

Vektor $\bar{\mathbf{r}}$ je pomocný vektor vyjadrený vzhľadom na snímkový súradnicový systém $X' Y' Z'$ vpravo na obr. 11.2. Ak označíme súradnice vektora $\bar{\mathbf{r}}$ symbolmi u, v, w , vektor $\bar{\mathbf{r}}$ môžeme vyjadriť v systéme jednotkových vektorov $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ a vzhľadom na vzťah (11.3) takto:

$$\bar{\mathbf{r}} = (u, v, w) \begin{pmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{pmatrix}. \tag{11.12}$$

Podľa rovnice (11.2) platí:

$$\bar{\mathbf{r}} = u \mathbf{i}' + v \mathbf{j}' + w \mathbf{k}'. \tag{11.13}$$

Rovnicu (11.13) zjednodušene zapíšeme podľa (11.4) v tvare:

$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (11.14)$$

Inverzní maticu \mathbf{A}^{-1} z matice smerových kosínusov dostaneme transponovaním matice \mathbf{A} [20]

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}_{\kappa}^{-1} \mathbf{A}_{\omega}^{-1} \mathbf{A}_{\varphi}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ľavá strana rovnice (11.11) bude:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}. \quad (11.15)$$

Dosadením rovníc (11.14) a (11.15) do rovnice (11.11) a rozpísaním rovnice (11.15) dostaneme:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x - x_0) + a_{21}(y - y_0) + a_{31}(z - z_0) \\ a_{12}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + a_{32}(z - z_0) \\ a_{13}(x - x_0) + a_{23}(y - y_0) + a_{33}(z - z_0) \end{pmatrix}. \quad (11.16)$$

Vzťah (11.15) môžeme zjednodušiť zapísať:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u \mathbf{i}' + v \mathbf{j}' + w \mathbf{k}'. \quad (11.17)$$

Ak skalárne vynásobíme výraz (11.17) jednotkovým vektorom \mathbf{k}' , dostaneme vzťah pre menovateľ výrazu (11.10)

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{k}' = (u \mathbf{i}' + v \mathbf{j}' + w \mathbf{k}') \mathbf{k}'. \quad (11.18)$$

Po vynásobení a úprave je:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{k}' = w. \quad (11.19)$$

Do rovnice (11.10) za výraz $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ dosadíme vzťah (11.17) a za výraz $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{k}'$ vzťah (11.19):

$$\mathbf{r}' = z' \frac{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}}{w}. \quad (11.20)$$

Súradnicu z' nahradíme hodnotou konštanty fotokomory c_k podľa vzťahu $z' = -c_k$. Po úprave rovnice (11.20) dostaneme

$$\mathbf{r}' = -c_k \begin{pmatrix} \frac{u}{w} \\ \frac{v}{w} \\ \frac{w}{w} \end{pmatrix}. \quad (11.21)$$

Vektor \mathbf{r}' rozpíšeme na zložky a upravíme pravú stranu rovnice:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -c_k \begin{pmatrix} \frac{u}{w} \\ \frac{v}{w} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11.22)$$

Vzťah (11.22) rozpíšeme na dve rovnice a za u, v, w dosadíme hodnoty zo vzťahu (11.16)

$$\begin{aligned} x' &= -c_k \frac{u}{w} = -c_k \frac{a_{11}(x-x_0) + a_{21}(y-y_0) + a_{31}(z-z_0)}{a_{13}(x-x_0) + a_{23}(y-y_0) + a_{33}(z-z_0)}, \\ y' &= -c_k \frac{v}{w} = -c_k \frac{a_{12}(x-x_0) + a_{22}(y-y_0) + a_{32}(z-z_0)}{a_{13}(x-x_0) + a_{23}(y-y_0) + a_{33}(z-z_0)}. \end{aligned} \quad (11.23)$$

Rovnice (11.23) vyjadrujú kolineárny vzťah určitého bodu v geodetickom a snímkovom súradnicovom systéme jednosnímkovej fotogrametrie. Snímkové súradnice x', y' sú funkciou prvkov vonkajšej orientácie snímky, a to súradníc projekčného centra x_0, y_0, z_0 , rotačných uhlov φ, ω, κ , geodetických (modelových) súradníc x, y, z a konštanty fofokomery c_k :

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x_0, y_0, z_0, \varphi, \omega, \kappa, x, y, z, c_k), \\ y' &= f_2(x_0, y_0, z_0, \varphi, \omega, \kappa, x, y, z, c_k). \end{aligned} \quad (11.24)$$

Uhly rotácie snímky φ, ω, κ sú skryté v koeficientoch matice \mathbf{A} a_{ij} (tab. 11.1) rovnice (11.6).

Na obr. 11.2 sme predpokladali nulové hodnoty súradníc hlavného snímkového bodu H' . Ak $x'_H \neq 0$ a $y'_H \neq 0$ v rovniciach (11.23) ľavé strany rovníc sú \bar{x}' a \bar{y}' .

$$\bar{x}' = x' - x'_H \quad \text{a} \quad \bar{y}' = y' - y'_H. \quad (11.25)$$

Zložky obrazového vektora \mathbf{r}' potom majú tvar:

$$\begin{aligned} x' &= x'_H - c_k \frac{(x-x_0)\cos\alpha_x + (y-y_0)\cos\beta_x + (z-z_0)\cos\gamma_x}{(x-x_0)\cos\alpha_z + (y-y_0)\cos\beta_z + (z-z_0)\cos\gamma_z}, \\ y' &= y'_H - c_k \frac{(x-x_0)\cos\alpha_y + (y-y_0)\cos\beta_y + (z-z_0)\cos\gamma_y}{(x-x_0)\cos\alpha_z + (y-y_0)\cos\beta_z + (z-z_0)\cos\gamma_z}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Na vyjadrenie priestorových vzťahov sú potrebné analogické vzťahy aj pre druhý meračský snímok so snímkovými súradnicami x'' a z'' .

Rovnice (11.26) upravíme ďalej tak, že ich uvedieme na spoločného menovateľa a každý člen čitateľa a menovateľa vydelíme výrazom

$$d = -\frac{1}{x_0 \cos\alpha_z + y_0 \cos\beta_z + z_0 \cos\gamma_z}. \quad (11.27)$$

Rovnice (11.26) nadobudnú tvar:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A_1 x + B_1 y + C_1 z}{A_3 x + B_3 y + C_3 z + 1} - D_1, \\ y' &= \frac{A_2 x + B_2 y + C_2 z}{A_3 x + B_3 y + C_3 z + 1} - D_2. \end{aligned} \quad (11.28)$$

kde

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1 z_0}{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 z_0 + 1}, \\ D_2 &= \frac{A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2 z_0}{A_3 x_0 + B_3 y_0 + C_3 z_0 + 1}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Za konštanty $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ sme položili výrazy:

$$\begin{aligned} A_1 &= (x'_H \cos \alpha_z + c_k \cos \alpha_x) d, \\ B_1 &= (x'_H \cos \beta_z + c_k \cos \beta_x) d, \\ C_1 &= (x'_H \cos \gamma_z + c_k \cos \gamma_x) d, \\ A_2 &= (y'_H \cos \alpha_z + c_k \cos \alpha_y) d, \\ B_2 &= (y'_H \cos \beta_z + c_k \cos \beta_y) d, \\ C_2 &= (y'_H \cos \gamma_z + c_k \cos \gamma_y) d, \\ A_3 &= d \cos \alpha_z, \\ B_3 &= d \cos \beta_z, \\ C_3 &= d \cos \gamma_z. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Ak vložíme počiatok geodetického súradnicového systému do jedného z vlícovacích bodov (P) a počiatok snímkového súradnicového systému do jeho obrazu (P'), potom pre body $P(x_p, y_p, z_p)$ a $P'(x'_p, y'_p)$ platí

$$y_p = x_p = z_p = 0 \quad \text{a} \quad x'_p = y'_p = 0,$$

vtedy rovnice (11.29)

$$\begin{aligned} D_1 &= 0, \\ D_2 &= 0 \end{aligned} \quad (11.31)$$

a rovnice (11.28) pre ľavú snímku budú mať tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z}{A'_3 x + B'_3 y + C'_3 z + 1}, \\ y' &= \frac{A'_2 x + B'_2 y + C'_2 z}{A'_3 x + B'_3 y + C'_3 z + 1}. \end{aligned} \quad (11.32)$$

pre pravú snímku

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{A''_1 x + B''_1 y + C''_1 z}{A''_3 x + B''_3 y + C''_3 z + 1}, \\ y'' &= \frac{A''_2 x + B''_2 y + C''_2 z}{A''_3 x + B''_3 y + C''_3 z + 1}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

V prípade, že sa jedná o kolíneárne vzťahy len medzi snímkovou a obrazovou rovinou, v rovniciach (11.32) x -ová geodetická súradnica je rovná nule, a tým sa nám príslušne zmenší počet transformačných konštánt:

$$\begin{aligned}x' &= \frac{A'_1 y + B'_1 z}{A'_3 y + B'_3 z + 1}, \\y' &= \frac{A'_2 y + B'_2 z}{A'_3 y + B'_3 z + 1}.\end{aligned}\tag{11.34}$$

Vzťah medzi súradnicami v geodetickom a fotogrametrickom súradnicovom systéme sa môže odvodiť dvoma spôsobmi:

- určením úplnej orientácie ľavej a pravej snímky vyčíslením 9-ich neznámych prvkov $x_0, y_0, z_0, x'_H, y'_H, c_k, \varphi, \omega, \kappa$ pre ľavý a pravý snímku [4].
- určením 18-tich transformačných konštánt: A'_1, B'_1, C'_1 až A''_3, B''_3, C''_3 .

Obidva spôsoby riešenia vyžadujú minimálne 6 vhodne priestorovo rozložených vlícovacích bodov, u ktorých poznáme ich geodetické a fotogrametrické súradnice. Väčší počet vlícovacích bodov umožňuje aplikáciu s vyrovnaním MNŠ.

Pri rovinnej kolineárnej transformácii je nevyhnutný počet vlícovacích bodov rovný 4.

11.3 Analýza numerického riešenia analytickej fotogrametrie

Numerické riešenie kolineárnej priestorovej (podobne i rovinnej) transformácie, je založené na riešení 9-ich transformačných konštánt A'_1, B'_1 až C'_3 pre ľavý snímok a A''_1, B''_1 až C''_3 pre pravý snímok. Za týmto účelom upravíme rovnice pre ľavý snímku (11.32):

$$\begin{aligned}A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z - A'_3 x x' - B'_3 y x' - C'_3 z x' - x' &= 0, \\A'_2 x + B'_2 y + C'_2 z - A'_3 x y' - B'_3 y y' - C'_3 z y' - y' &= 0.\end{aligned}\tag{11.35}$$

Do rovníc (11.35) dosadíme redukované geodetické a fotogrametrické súradnice 5-tich vlícovacích bodov redukovaných k počiatku v 6. bode. Dostaneme tak 10 rovníc o 9-tich neznámych. Sústavu rovníc riešime napr. Gaussovou eliminačnou metódou s výberom hlavného prvku a spresnením neznámych metódou rezíduí. Týmto riešením vytvárame hornotrojuholníkovú maticu obsahujúcu na mieste pivota najväčší prvok matice. Do desiatej rovnice sa tak zaradi a na výpočte sa nezúčastní najmenej hodnotná rovnica z hľadiska definície transformačných konštánt.

Rovnakým spôsobom sa vypočíta vektor transformačných koeficientov A''_1, B''_1 , až C''_3 pre pravý snímku.

Geodetické súradnice vlícovacích a pozorovaných bodov x, y, z počítame z upravených rovníc (11.32) a (11.33):

$$\begin{aligned}(A'_1 - A'_3 x')x + (B'_1 - B'_3 x')y + (C'_1 - C'_3 x')z - x' &= 0, \\(A'_2 - A'_3 y')x + (B'_2 - B'_3 y')y + (C'_2 - C'_3 y')z - y' &= 0, \\(A''_1 - A''_3 x'')x + (B''_1 - B''_3 x'')y + (C''_1 - C''_3 x'')z - x'' &= 0, \\(A''_2 - A''_3 y'')x + (B''_2 - B''_3 y'')y + (C''_2 - C''_3 y'')z - y'' &= 0.\end{aligned}\tag{11.36}$$

V prípade, že je k dispozícii viac ako 6 vlícovacích bodov, transformačné koeficienty pre ľavý a pravý snímok sa vypočítajú s vyrovnaním MNŠ. Vtedy linearizujeme rovnice (11.26) rozvojom do Taylorovho radu. Pretvorené podmienkové rovnice majú tvar (13.15).