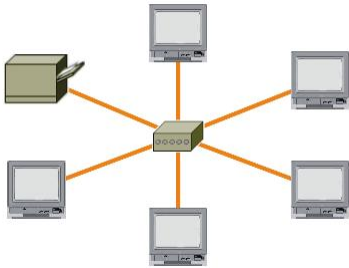


Topológia

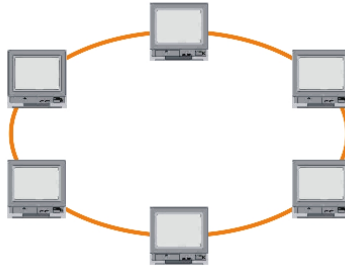
Definícia topológie

- Je to matematická disciplína, ktorej úlohou je objasňovanie a výskum **idey spojitosti**. Idea spojitosti je pôvodne výsledkom intuitívneho poznania základnej vlastnosti priestoru a času, takže má fundamentálny význam pre poznanie (wiki)
- Termín pochádza z gréckeho slova topos - miesto a logos – štúdium
- Študuje priestorové vzťahy objektov, ktoré môžu byť definované nezávisle od súradnicových systémov
- Pre topológiu je charakteristické to, že nepracuje so súradnicami objektov. Možno ju prirovnať ku geometrii očistenej od pojmov veľkosť, tvar a smer

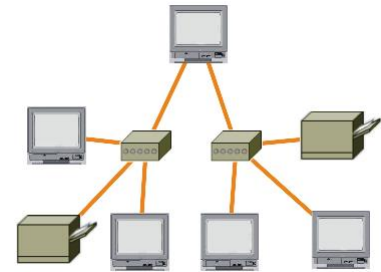
Fyzická topológia



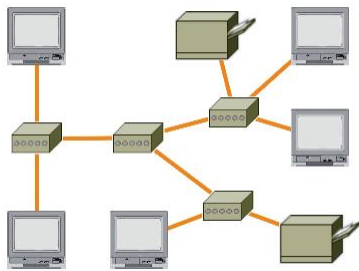
Hviezdicová



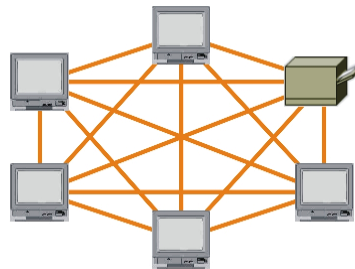
Kruhová



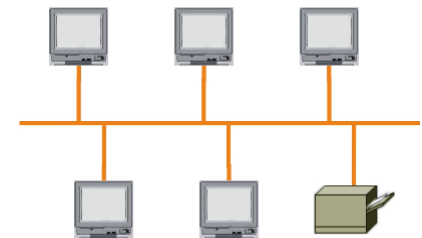
Stromová



Kombinovaná



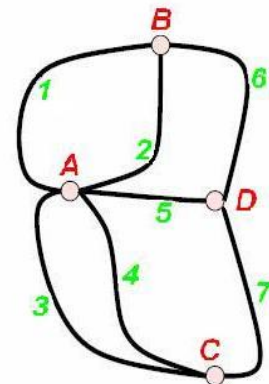
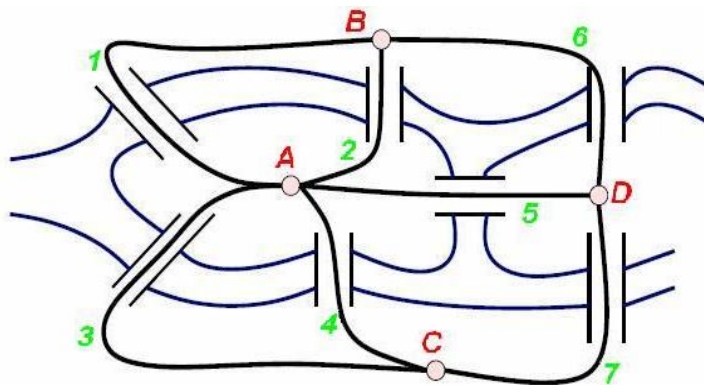
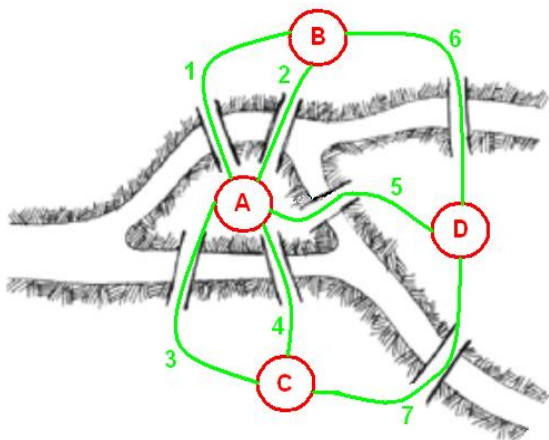
Mesh



Zbernicová

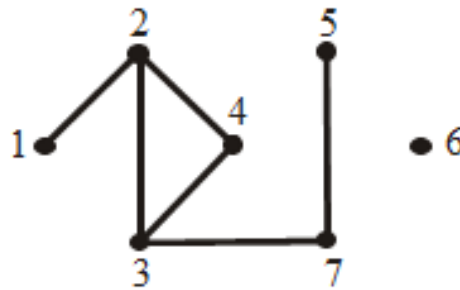
Eulerov problém

Leonhard Euler v r. 1736 riešil problém, ako prejsť po všetkých mostoch Královca (dnes Kaliningrad) práve raz a vrátiť sa domov. Ako prvý použil na znázornenie tejto úlohy **graf**. Rozdelil brehy rieky na štyri časti (uzly) označené ako A, B, C, D, ktoré sú pospájané siedmymi mostami (hranami) označenými 1 až 7



Teória grafov

- Topológiu priestoru môžeme opísať pomocou **grafov**
- Teória grafov je systém na vyjadrenie vzťahov medzi dvojicami objektov, ktorý sa skladá z **uzlov** a **hrán**
- Hrana vždy spája dva vrcholy (uzly)



- Graf $G = (V, E)$ s v vrcholmi a e hranami $v \times e$
- Množina vrcholov $V = \{1, 2, \dots, 7\}$
- Množina hrán $E = \{ \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{5, 7\} \}$

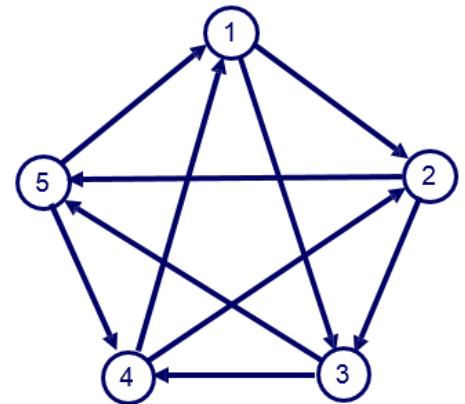
Orientované grafy

- V grafe sú orientované alebo neorientované hrany
- V orientovanej hrane sa rozlišuje počiatočný a koncový bod
- Smer hrany sa označuje pomocou šípky
- Dva uzly neorientovaného grafu sú susedné
- Množina uzlov orientovaného grafu

$$V = \{1,2,3,4,5\}$$

- Množina hrán orientovaného grafu

$$E = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,1\}, \\ \{4,2\}, \{5,1\}, \{5,4\} \}$$



Reprezentácia grafov

- Graf sa dá reprezentovať (zapísať) mnohými spôsobmi
- Nedá sa povedať, ktorý je lepší, pretože každá reprezentácia sa hodí k inému typu úloh
- Najčastejšie reprezentácie grafov sú:

Matica incidencie

V orientovanom grafe reprezentujú riadky matice incidencie uzly grafu a stĺpce jednotlivé hrany. Súradnica daná riadkom m a stĺpcom n je 1, ak je uzol m zdrojovým uzlom hrany n , -1 v prípade, že je uzol cieľovým uzlom hrany n a 0 v prípade, že uzol m s hranou neinciduje

Matica susednosti

V orientovanom grafe má matica v m -tom riadku a n -tom stĺpci 1, keď z uzla m vedie hrana do uzla n . V opačnom prípade je to 0. Neorientované grafy majú maticu susednosti symetrickú.

Spojová reprezentácia

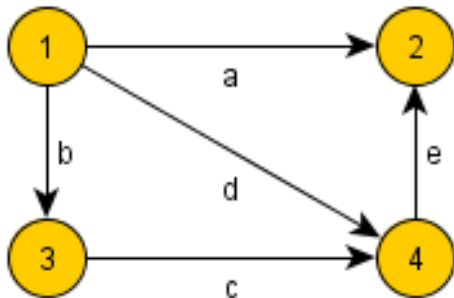
Najpoužívanejšia reprezentácia grafov. Obsahuje ukazovatele na všetky uzly

Matica incidencie

(Incident matrix)

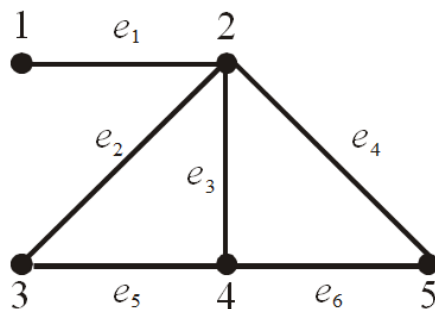
Incidentná hrana - ak existuje hrana grafu, ktorá spája tieto uzly nazýva sa incidentná hrana (e_i je incidenčné s v_j)

Matica incidencie v orientovanom grafe



$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} & a & b & c & d & e \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ v_3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matica incidencie v neorientovanom grafe

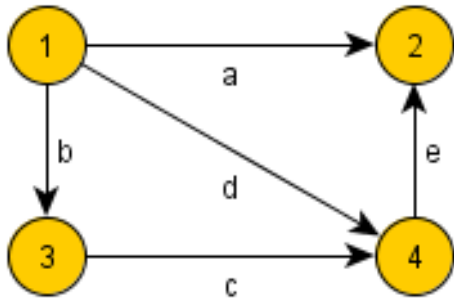


$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matica susednosti

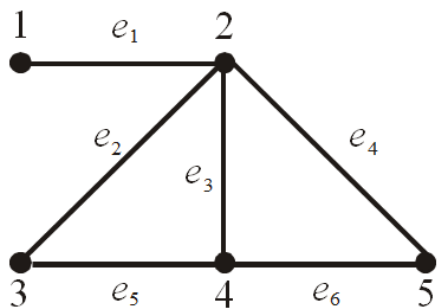
(Adjacency matrix)

Matica susednosti v orientovaných grafoch



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matica susednosti v neorientovaných grafoch

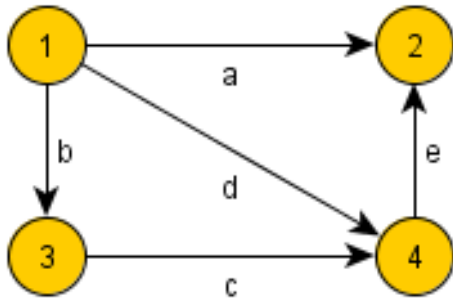


$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ak sú niektoré hrany grafu násobné, to znamená že existuje niekoľko hrán medzi tými istými uzlami, v matici sa namiesto číslice 1 uvedie počet násobnosti hrán

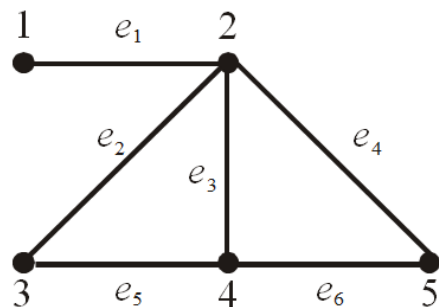
Spojová reprezentácia

Ak má orientovaný graf m uzlov, potom spojová reprezentácia obsahuje m spojových zoznamov. Každý z týchto zoznamov obsahuje ukazatele na všetky uzly, do ktorých vedie hrana z uzlu



1 \rightarrow 2, 3, 4
2 \rightarrow null
3 \rightarrow 4
4 \rightarrow 2

V neorientovanom grafe obsahuje spojová reprezentácia zoznam všetkých susediacich vrcholov



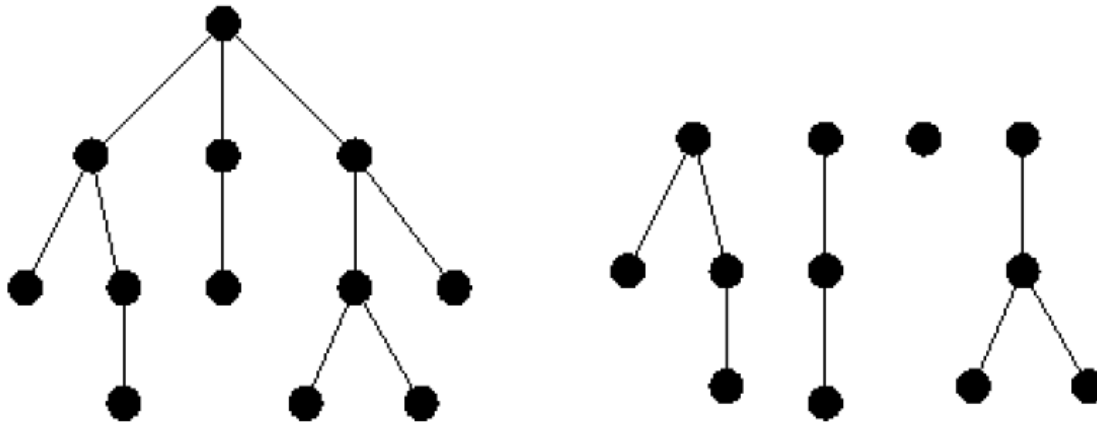
1 \rightarrow 2
2 \rightarrow 1, 3, 4, 5
3 \rightarrow 2, 4
4 \rightarrow 2, 3, 5
5 \rightarrow 2, 4

Vlastnosti grafov

- Rovnobežné hrany majú v orientovanom grafe totožný začiatok aj koncový bod. Počet vzájomne rovnobežných hrán označujeme **násobnosť hrany**
- V neorientovanom grafe rovnobežné hrany neexistujú, sú tu len hrany, ktoré spájajú rovnaké uzly
- Hrana, ktorá má začiatok i koniec v tom istom uzle, sa nazýva **slučka**
- Neorientovaný graf nazývame **strom** (tree), keď neobsahuje cykly a je súvislý

Strom

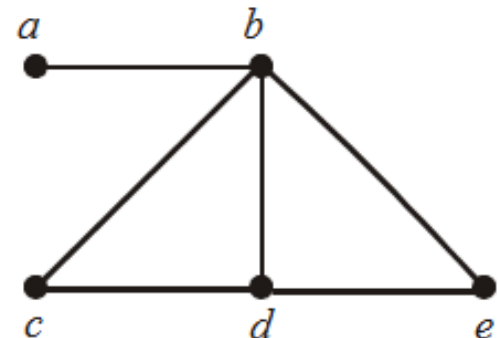
- Strom je zakorenený, keď má najvyšší vrchol (koreň-root)
- Každý vrchol, ktorý je bližšie ku koreňu je rodič, ktorý môže mať ľubovoľný počet detí, ktoré s ním susedia
- Strom vpravo je **les** (forest)
- Orientovaný acyklický graf sa nazýva **dag** (directed acyclic graf)



Stupeň vrcholu

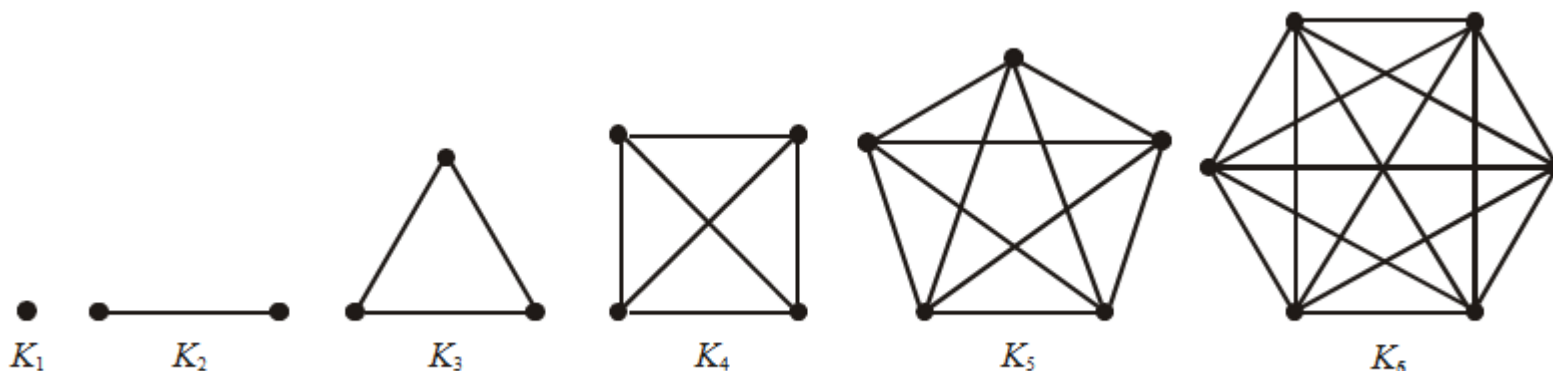
- Počet hrán incidentných s vrcholom určuje **stupeň vrcholu** (uzla)
- Ak spočítame stupne všetkých vrcholov grafu dostaneme dvojnásobok počtu hrán (každá hrana má dva konce)
- Ak v grafe existujú vrcholy nepárneho stupňa, tak počet hrán musí byť párny
- Stupeň vrcholu v neorientovanom grafe je rovný počtu hrán s ním incidentných, s výnimkou faktu, že **slučka** na vrchole prispieva dvakrát k stupňu vrcholu
- Stupeň vrcholu v sa označuje $deg(v)$

$deg(a)=1, deg(b)=4, deg(c)=2, deg(d)=3, deg(e)=2$



Úplný graf

- Graf, v ktorom existuje cesta medzi každou dvojicou rozdielnych vrcholov nazývame **súvislý (úplný) graf**
- Pri orientovanom grafe môžeme rozlišovať vstupný i výstupný stupeň vrcholu.
- Vstupný stupeň vrcholu v orientovanom grafe určuje počet hrán, ktoré sú v danom uzle ako koncové a výstupný stupeň určuje počet hrán, ktoré majú v danom uzle začiatok

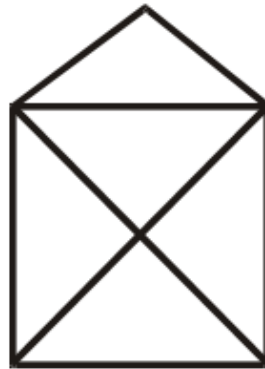


Uzavretý graf

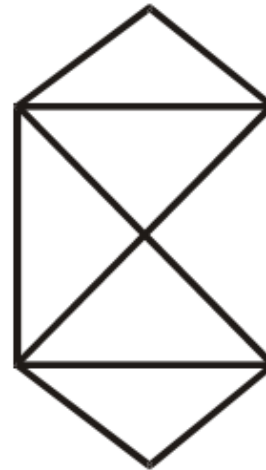
- Uzavretý súvislý graf je možné nakresliť jedným ťahom
- Uzol, ktorý nie je spojený s iným uzlom nazývame izolovaný a má stupeň 0
- Ktorý graf je súvislý?



A

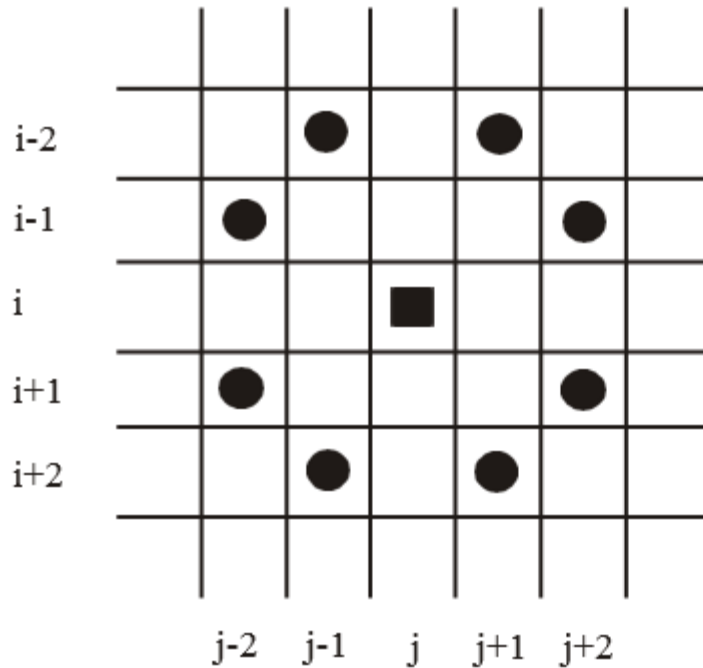


B

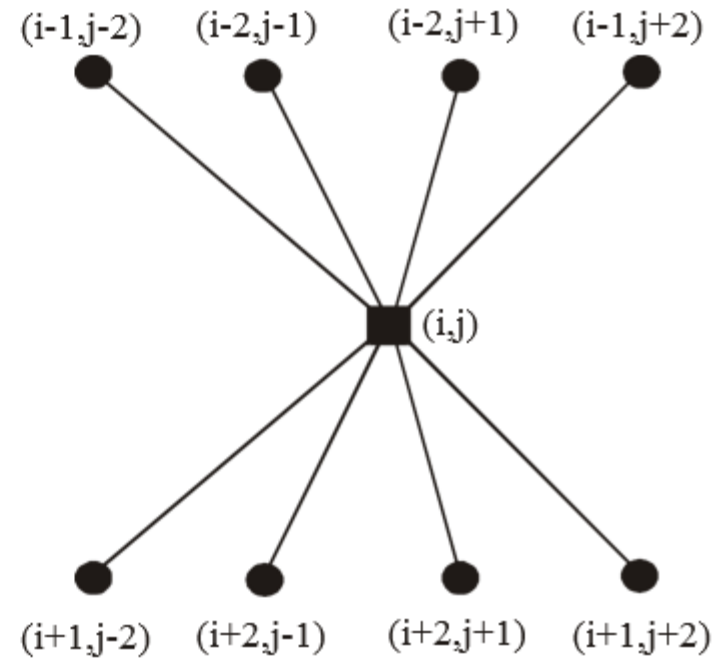


C

Hamiltonovský ťah koňom



A

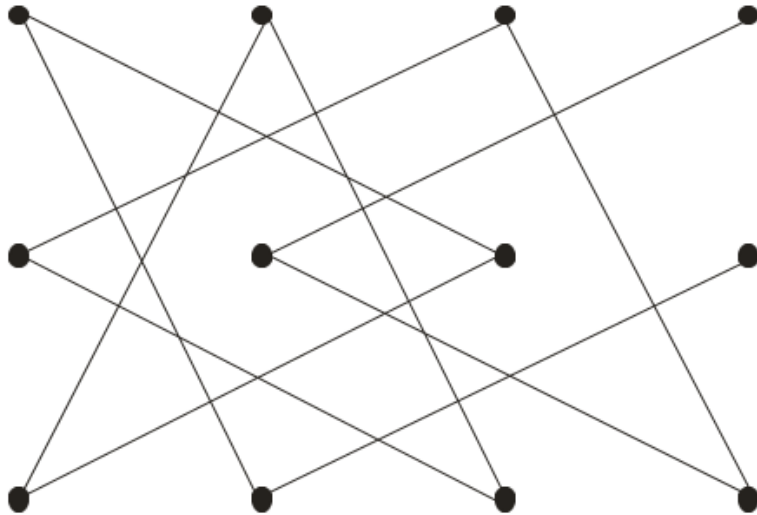


B

(A) Prípustné ťahy koňom na šachovnici

(B) Odpovedajúci graf (východzí vrchol je označený štvorcem)

Ťah koňom na šachovnici 3x4



3	6	9	12
8	11	4	1
5	2	7	10

tabuľka postupnosti ťahov

Sieťové analýzy

- Keď sa v incidenčnej matici priradia k jednotlivým hranám hodnoty s konkrétnym významom napr. vzdialenosť, čas, spotreba a pod., hovoríme o **ohodnotenom grafe**
- Okrem hrán grafu sú ohodnotené aj uzly grafu
- Takto uložené údaje sa využívajú hlavne pri **sieťových analýzach**
- **Metódy sieťovej analýzy (Network Analysis)** je skupina špeciálnych analytických metód, ktoré sa používajú v prípadoch, kedy je potrebné analyzovať alebo optimalizovať nejakú sieť vzájomne prepojených a súvisiaceho prvkov, ktoré majú medzi sebou nejakú súvislosť, napr. metóda kritickej cesty

Určovanie topológie priestoru

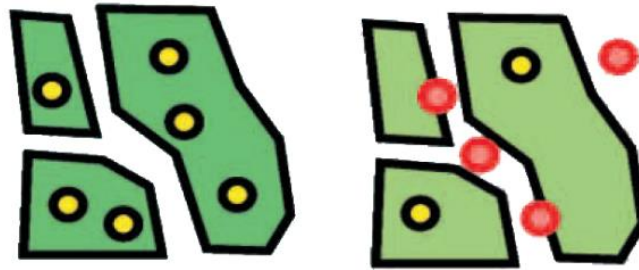
Pri dvojici objektov typu **bod – bod** existujú dve základné polohy: body sú totožné alebo nie

Pri dvojici objektov typu **bod–lína** existujú tri základné polohy: bod leží mimo línie, bod leží na línii a bod sa zhoduje s koncovým bodom línie

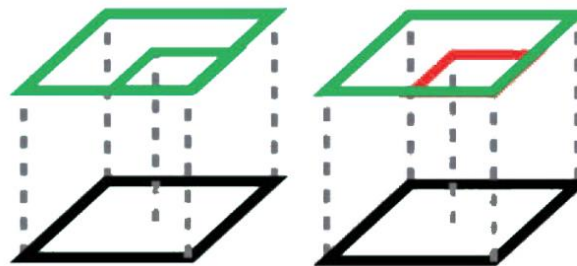
Pri vzťahoch objektov typu **bod–plocha** nastanú tri situácie: bod leží vo vnútri plochy, bod leží na hrane plochy (prípadne je totožný s uzlovým bodom plochy) alebo bod leží mimo plochy

Topologické pravidlá v geodatabáze ArcGIS

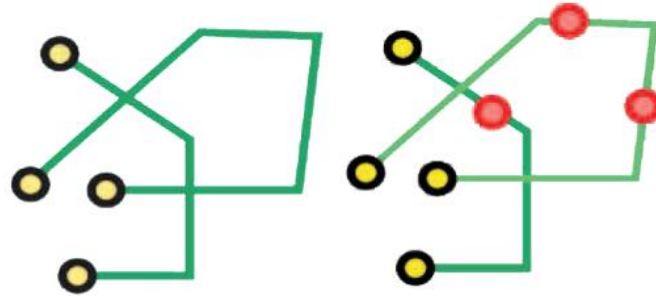
- Body v jednej triede prvkov musia byť vo vnútri polygónu, napr. hlavné mestá musia ležať vnútri jednotlivých štátov



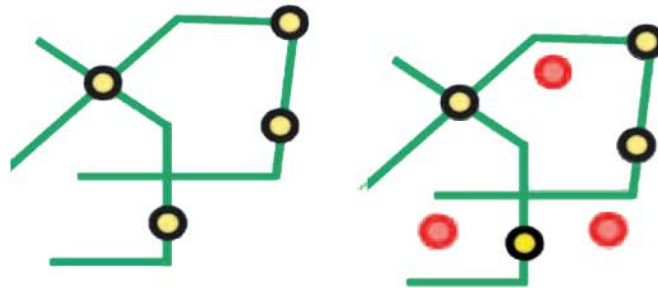
- Body v jednej triede prvkov musia ležať na hraniciach polygónov z druhej triedy prvkov, napr. u prípojok inžinierskych sietí sa môže požadovať, aby ležali na hranici parciel



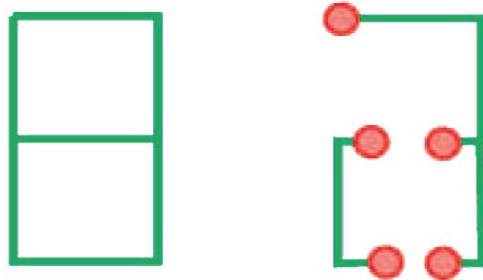
- Body v jednej triede prvkov musia byť pokryté koncovými bodmi línií inej triedy prvkov, napr. body, ktoré reprezentujú križovatky, by mali byť koncové body stredových línií ulíc



- Body v jednej triede prvkov musia ležať na líniách inej triedy prvkov, napr. monitorovacie stanice čistoty vôd musia ležať na líniách tokov



- Koniec každej línie jednej triedy prvkov sa musí dotýkať buď inej línie, alebo samej seba. Použitie pravidla je vhodné, ak chceme, aby všetky línie boli vzájomne prepojené. Pravidlo sa používa pri tvorbe cestnej siete s výnimkou slepých ciest



- Línie sa nemôžu prekrývať so žiadnou zo svojich častí. Línie sa môžu krížiť, dotýkať koncovým bodom, alebo prekrývať samé seba, napr. línie úsekov diaľnic sa môžu pretínať, dotýkať, ale nie vzájomne prekrývať



- Línie sa môžu dotýkať iba svojimi koncami, nemôžu sa ani pretínať, ani prekrývať. Pravidlo použijeme napr. pri budovaní hraníc parciel, kde hranice sa nedotýkajú, ani neprekrývajú, sú spojené len svojimi koncovými bodmi



- Línie v jednej triede prvkov nemôžu prekrývať žiadnu časť línie z druhej triedy. Pravidlo je vhodné požiť napr. pri cestách a riekach, kde sa môžu pretínať, približovať, ale nie prekrývať.



Topologické operátory

Definujú vzájomné polohy objektov:

1. Nemajú spoločný prvok – disjoint
2. Krížia sa – crosses
3. Dotýkajú sa – touches

Mimo - Disjoint	
Bod - Bod	
Línia - Línia	
Polygón - Polygón	

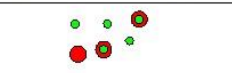
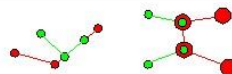
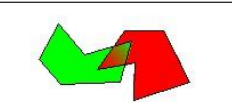
Krížia sa - Crosses	
Bod - Línia	
Bod - Polygón	
Línia - Línia	
Línia - Polygón	

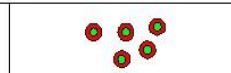
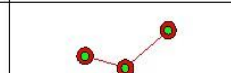
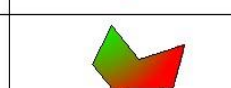
Dotýkajú sa - Touches	
Bod - Línia	
Bod - Polygón	
Línia - Línia	
Línia - Polygón	
Polygón - Polygón	

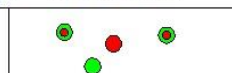
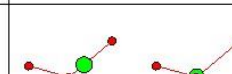
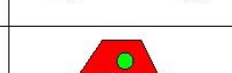
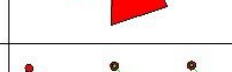


4. Prekrývajú sa – overlap

5. Zhodujú sa – equals

6. Obsahujú – contains

Prekrývajú sa - Overlap	
Bod - Bod	
Línia - Línia	
Polygón - Polygón	

Zhodujú sa - Equals	
Bod	
Línia	
Polygón	

Obsahuje - Contains	
Bod - Bod	
Bod - Línia	
Bod - Polygón	
Línia - Línia	
Línia - Polygón	
Polygón - Polygón	

Topologické štruktúry

Pri počítačovom spracovaní je nutné vytvoriť záznamy, ktoré umožňujú uchovanie a spracovanie vzájomných topologických vzťahov

Na uloženie topologických vzťahov v prostredí GIS sa využívajú tabuľky databáz

Samostatne sa ukladajú informácie o stenách (plochách), hranách a uzloch (nie o líniách a bodoch)

Topologické tabuľky sú rozsiahle a z tohto dôvodu sú užívateľom ukryté

Druhy topológií

Topológia bodov

- má jednoduchú štruktúru
- pretože sú body vzájomne nezávislé, nezáleží na ich poradí
- typickým znakom je tabuľkový záznam identifikátorov bodov ich súradnicami

Topológia línií

- má pevnú štruktúru, ktorá obsahuje informácie o počiatočnom a koncovom bode
- môže obsahovať identifikátor hrany, smer hrany a informáciu o ľavej a pravej ploche v smere orientácie hrany

Topológia plôch

- tabuľky obsahujú informácie o identifikátore plochy a zoznam všetkých hrán, ktoré definujú plochu
- poradie hrán je uvádzané v smere hodinových ručičiek
- pretože plochy musia byť uzavreté, prvý vrchol počiatočnej hrany je totožný s koncovým vrcholom poslednej hrany

Úrovne topologických modelov

Výmenný štandard DIGEST (Digital Information Geographic Exchange Standard), ktorý navrhla skupina DGIWG (Digital Geographic Information Working Group) definuje štyri úrovne topológie, ktoré sa odlišujú zložitou a opisom topologických vzťahov:

- 1. Spaghetti – úroveň 0**
- 2. Chain node – úroveň 1**
- 3. Planar Graph – úroveň 2**
- 4. Full Topology – úroveň 3**

Špagetový model

Základná údajová úroveň **Spaghetti** spočíva len v uložení izolovaných bodov a hrán, pričom sa neuchováva žiadna topologická informácia

Jednotlivé línie sa môžu vzájomne krížiť, nemusia sa dotýkať v uzloch, môžu byť zdvojené, prípadne nemusia vytvárať reťazce línií

Špagetová údajová štruktúra je najjednoduchšou vektorovou štruktúrou

Je odvodená zo spôsobu digitalizácie analógových máp, ktorá spočíva v prevode analógovej mapy postupným sekvenčným zaznamenávaním bodových a líniových objektov

Každý priestorový objekt je v tejto štruktúre priestorovo definovaný, ale neuchováva si žiadne priestorové vzťahy.

Bodový objekt je definovaný súradnicami

Líniový objekt je definovaný reťazcom súradníc po sebe nasledujúcich jednotlivých bodov líniového objektu

Plošné objekty sú vytvárané uzavretým reťazcom súradníc lomových bodov

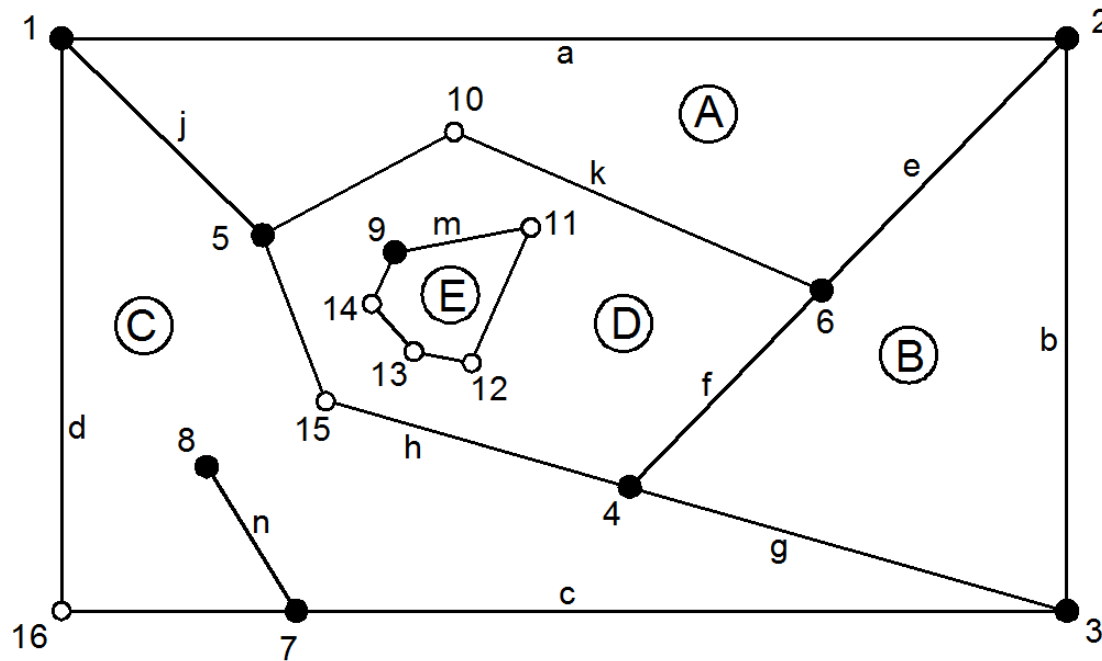
Spoločná hranica dvoch plošných objektov je v tejto štruktúre uložená dvakrát.

Je to jednoduchá údajová štruktúra, v ktorej nie sú zaznamenané relačné priestorové vzťahy

V prípade potreby je nutné priestorové vzťahy odvodiť výpočtom

V súčasnosti sa využíva na počítačovú reprodukciu máp, prípadne na uchovávanie priestorových údajov, s ktorými nebudú vykonávané priestorové operácie

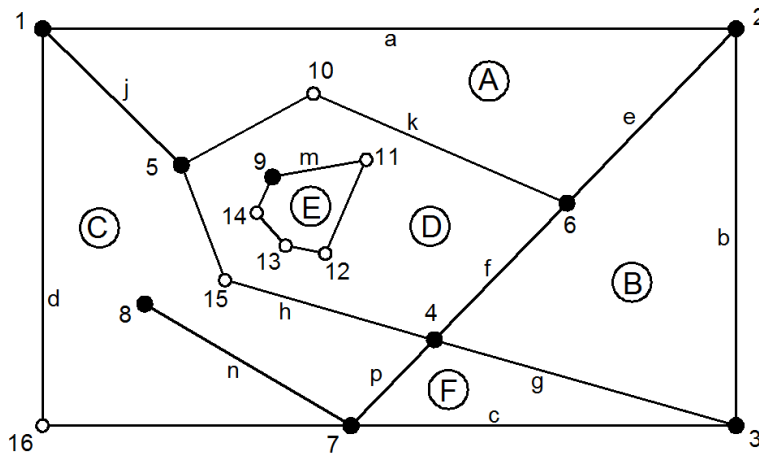
Záznam Spaghetti modelu



Typ	ID	Zoznam hrán	Zoznam vrcholov
polyline		a, b, c, d, j, h,	1, 2, 3, 7, 16, 1, 5, 15,
polyline		k, f	5, 10, 6, 4
line		e	2, 4
line		n	7, 8
polygón	E	m	9, 11, 12, 13, 14, 9

Chain node model

- Pre popis **Chain node topológie** používa DIGEST hrany a uzly
- Ukladajú sa len vzťahy medzi uzlami a hranami
- Hrany sa môžu pretínať
- Okrem tabuľky hrán táto štruktúra obsahuje tabuľku líniových objektov a tabuľku bodov



Hrana	Počiatok	Koniec
a, b	1	3
d, c	1	3
e, f, p	2	7
h, g	5	3
j, k	1	6
m	9	9
n	7	8

Topologická štruktúra

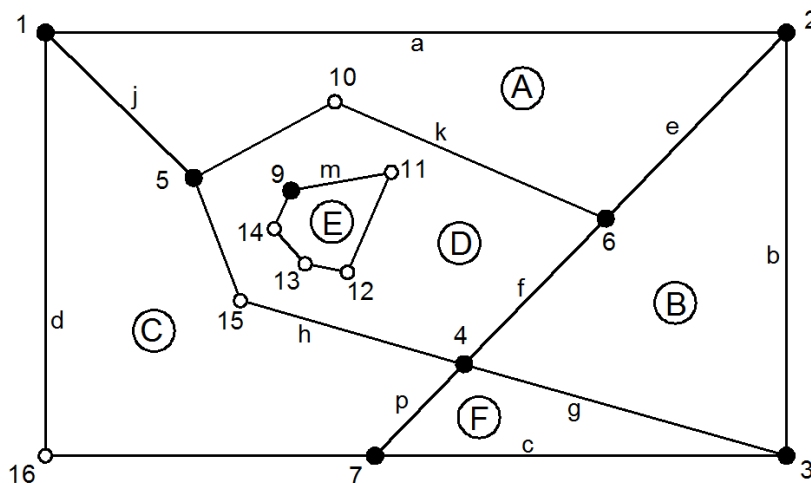
Planar graph

Základom PLA štruktúry sú **body** (uzly), **línie**, ktoré vytvárajú nepretínajúcu sa spojitú krivku ukončenú počiatočným a koncovým bodom a **plochy**, ktoré sú definované vzájomne súvisiacimi líniami, ktoré vytvárajú ich uzavreté hranice
PLA štruktúra musí spĺňať nasledujúce pravidlá:

- dva rôzne uzly nemôžu mať rovnaké súradnice
- uzly môžu pretínať hrany len v ich počiatočných alebo koncových bodoch
- hrany nesmú pretínať alebo prekrývať iné hrany
- každá plocha môže byť ohraničená ľubovoľným počtom hrán s ľubovoľným počtom uzlov
- dve plochy sa nesmú prekrývať a dotýkajú sa, ak majú aspoň jednu spoločnú hranu

Vlastnosti Planar modelu

- Plochy vznikajú z línií, ktoré vytvárajú nepretínajúcu sa slučku, čo znamená, že počiatočný bod prvej línie musí byť koncovým bodom poslednej línie.
- Plocha môže vzniknúť aj z jednej uzavretej línie
- PLA štruktúra musí mať definovanú jednu „nekonečnú“ vonkajšiu plochu, ktorá je úplne ohraničená líniami



Hrana	Počiatok	Koniec
a	1	2
b	3	2
d	1	7
c	3	7
e	2	6
f	4	6
p	4	7
h	5	4
g	3	4
j	1	5
k	6	5
m	9	9
n	7	8