Normálne rozdelenie Gaussova krivka

$$N(\mu,\sigma^2)$$

Normálne rozdelenie
(Gauss – Laplaceove rozdelenie)

Pravdepodobnostný model chovania sa veľkého počtu náhodných javov

Používa sa pri náhodných veličinách, ktoré sú súčtom veľkého počtu nezávislých alebo len slabo závislých hodnôt

Príklady:

výška, hmotnosť, chyby merania, …

Vlastnosti normálneho rozdelenia

Za určitých podmienok je možné pomocou Normálneho rozdelenia aproximovať rad iných spojitých i diskrétnych rozdelení

Je symetrické okolo strednej hodnoty, ktorá je súčasne mediánom aj modusom

Hustota pravdepodobnosti normálneho rozdelenia

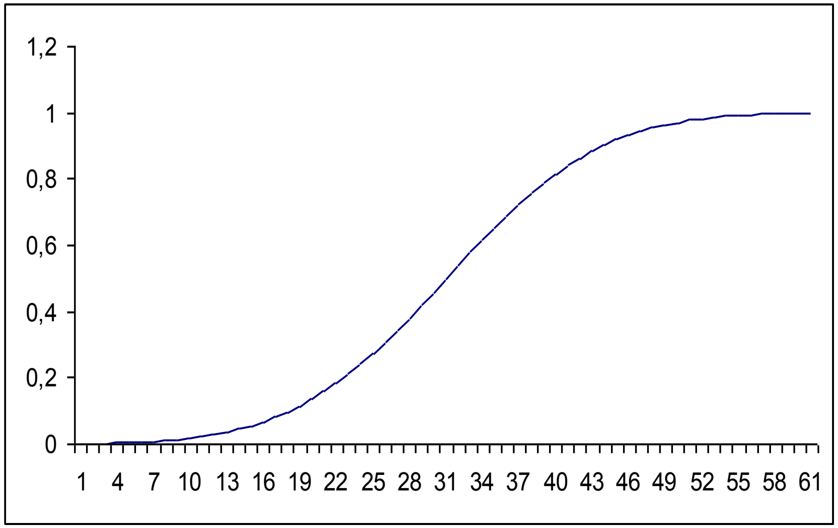
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$E(x)=\mu$ je stredná hodnota, ktorá charakterizuje polohu rozdelenia a je to hodnota s maximálnou hustotou

$V(x)=\sigma^2$ je rozptyl, variancia

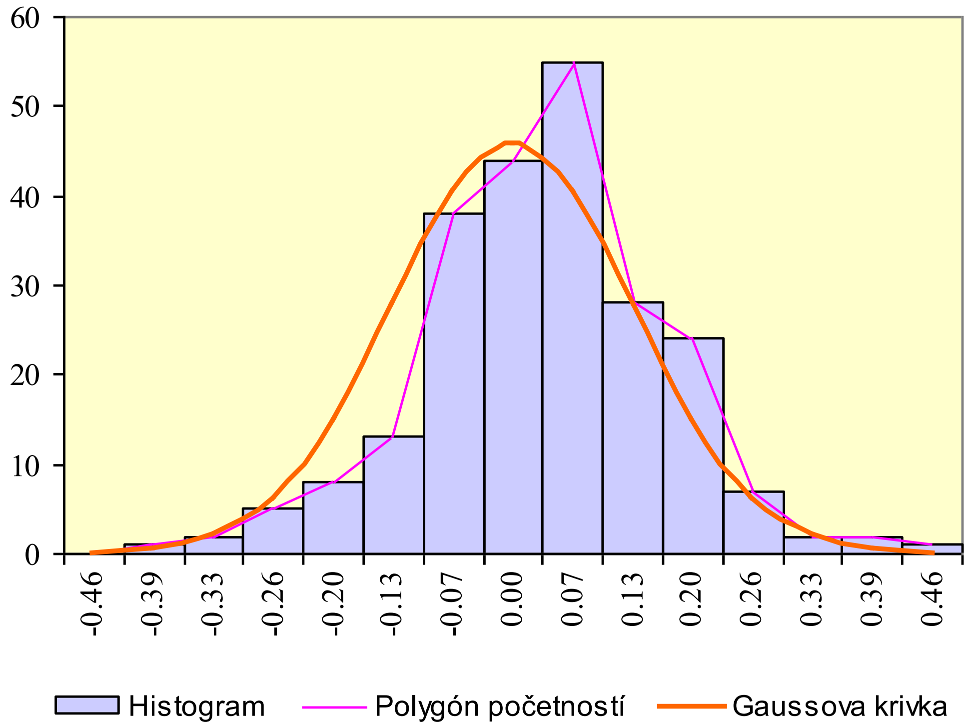
Distribučná funkcia

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



Gaussova krivka

Normálne rozdelenie má tvar zvonovitej krivky, ktorá nadobúda maximum v bode $x=\mu$ a pri $x \to \infty$ sa asymptoticky približuje k osi x



Vlastnosti Gaussovej krivky

- Blíži sa asymptoticky k osi x
- V bodoch ±1σ má inflexné body
- Dotyčnice v inflexných bodoch pretínajú os x v bodoch ±2σ
- Polomer krivosti vo vrchole

$$r = \sigma^2 / y_0$$

- Maximálna poradnica v osi y

$$y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0{,}39894}{\sigma}$$

- Malé chyby majú najväčšiu početnosť a koncentrujú sa okolo strednej hodnoty

- Hrubé chyby sú za hranicou 3σ

- Koeficient šikmosti

$$A = \mu_3(u) = \frac{E\left(x - E(x)\right)^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

- Koeficient špicatosti

$$E = \mu_4(u) - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$$

Počiatočný a centrálny moment

- Diskrétna náhodná veličina

$$\nu_k = \sum x^k P(x)$$

$$\mu_k = \sum_x \left(x - E(x)\right)^k P(x)$$

- Spojitá náhodná veličina

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\, dx$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(x)\right)^k \varphi(x)\, dx$$

Normované normálne rozdelenie N(0,1)

Parametre normovaného normálneho rozdelenia:

$$\mu = E(x) = 0$$

$$\sigma^2 = V(x) = 1$$

Normovaná náhodná veličina u

$$u = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Každé normálne rozdelenie N(μ,σ^2) je možné pomocou transformácie upraviť na normované N(0,1)

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia N(0,1)

Hustota pravdepodobnosti normovaného normálneho rozdelenia

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

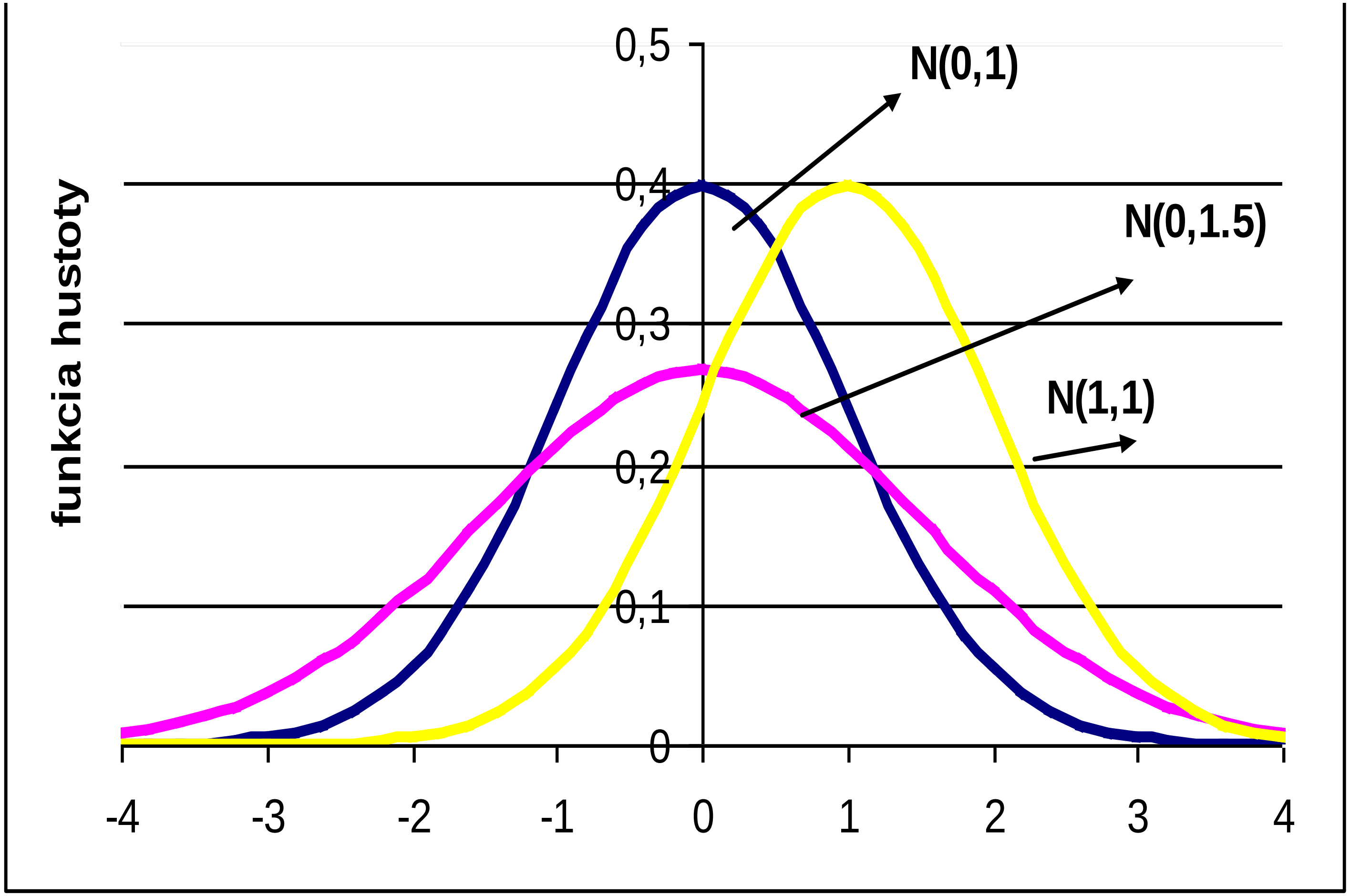
je symetrická okolo nuly, preto platí:

$$\varphi(-u) = 1 - \varphi(u)$$

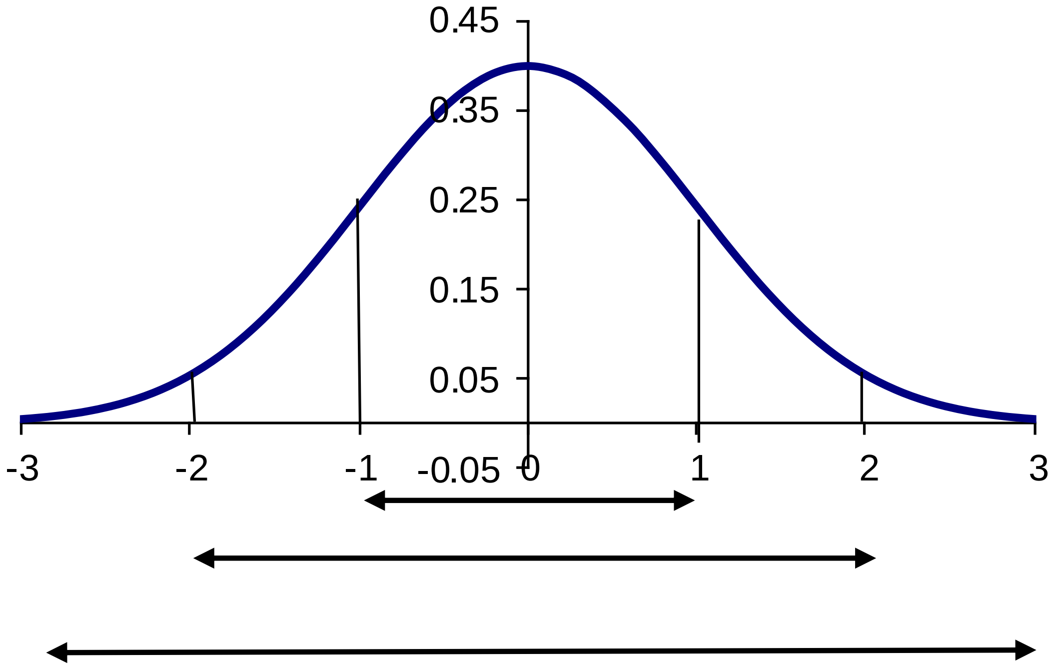
Distribučná funkcia

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Normálne rozdelenia s rôznymi parametrami



Pravidlo 3-sigma



$\mu-\sigma$ **68,26%** $\mu+\sigma$

$\mu-2\sigma$ **95,45%** $\mu+2\sigma$

$\mu-3\sigma$ **99,73%** $\mu+3\sigma$

Dvojrozmerné normálne rozdelenie

- Rozdelenie náhodnej veličiny x=(x1,x2) so združenou hustotou pravdepodobnosti

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right)}$$

- ρ - koeficient korelácie medzi obidvomi náhodnými veličinami