

GRAVIMETRICKÉ ZVISLICOVÉ ODCHÝLKY



Stokesov vzorec rieši výpočet geoidickej undulancie z tiažových anomálií

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} S(\psi) \Delta g d\sigma$$

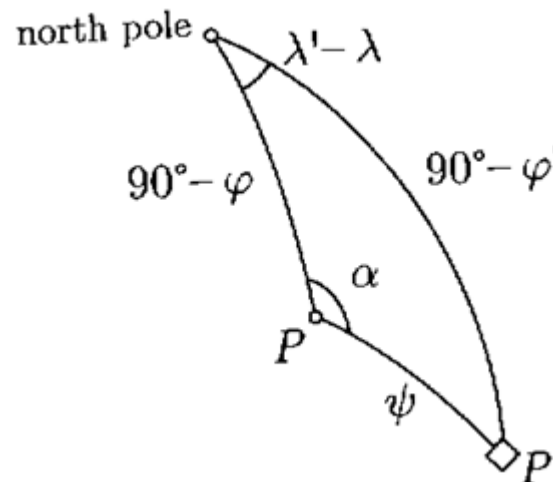
Pre bod P' na povrchu Zeme má upravený tvar

$$N(\varphi, \lambda) = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') S(\psi) \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$

ψ je sférická vzdialenosť daná z kosínusovej vety

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Podobný výpočet zaviedol Vening Meinesz (1928) pre určenie zvislicových odchýlok pomocou tiažových anomálií



Zložky zvislicovej odchýlky

Zvislicová odchýlka má dve zložky

$$\theta = -\frac{dN}{ds}$$

V smere severojužnom je **meridiánová zložka zvislicovej odchýlky**

$$\xi = -\frac{\partial N}{ds_\varphi} = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}$$

pričom jej dĺžkový element poludníkového pásu sa rovná

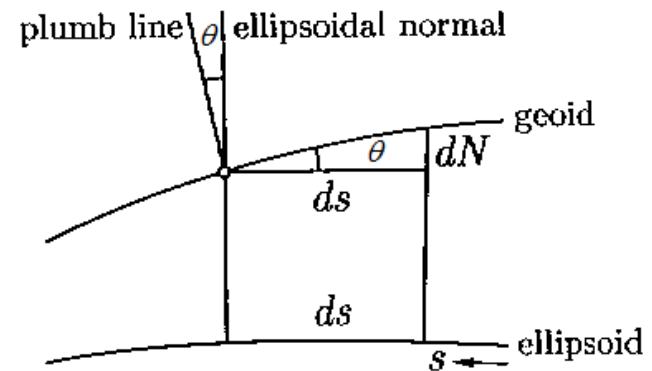
$$ds_\varphi = R d\varphi$$

a v smere východozápadnom je **priečna zložka zvislicovej odchýlky**

$$\eta = -\frac{\partial N}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}$$

pričom jej dĺžkový element rovnobežkového pásu sa rovná

$$ds_\lambda = R \cos \varphi d\lambda$$



Zavedením geoidickej undulancie zo Stokesovho vzorca dostaneme pre meridiánovú zvislicovú odchýlku vzťah

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$

a priečnu zvislicovú odchýlku

$$\eta = -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} = -\frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \Delta g(\varphi', \lambda') \frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$

Potrebuje diferencie na pravej strane rovníc

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} = \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = \frac{dS(\psi)}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

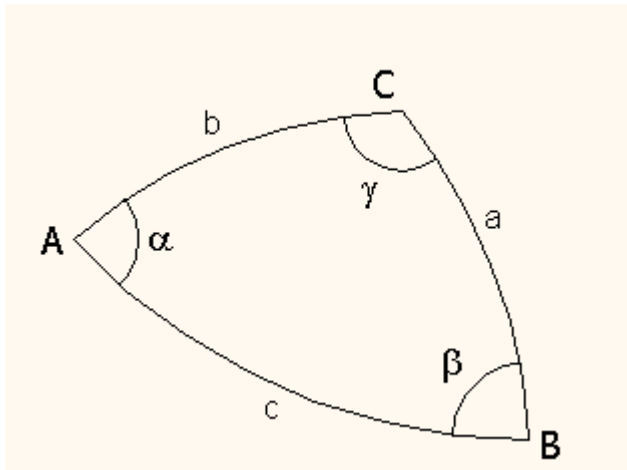
Najprv diferencujeme rovnicu sférickej vzdialenosti podľa φ

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$



Prehľad použitých goniometrických funkcií v sférickom trojuholníku



$$\sin a \cos \beta = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos \alpha$$

$$\sin a \cos \gamma = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos \alpha$$

Kosínusová veta

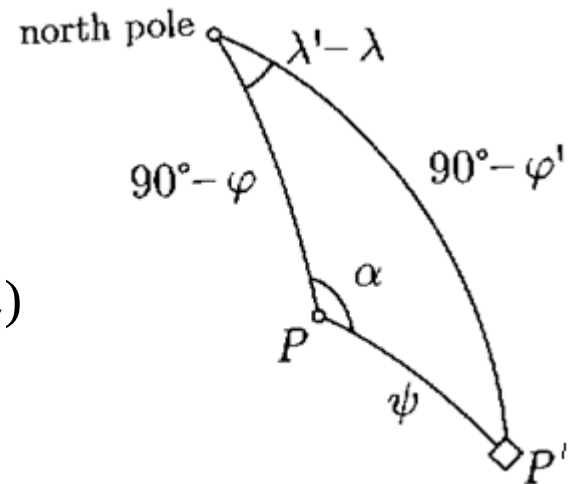
$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Sínuskosínusová veta

$$\sin \psi \cos \alpha = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Sínusová veta

$$\sin \psi \sin \alpha = \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)$$



a potom podľa λ

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \cos \varphi \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)$$

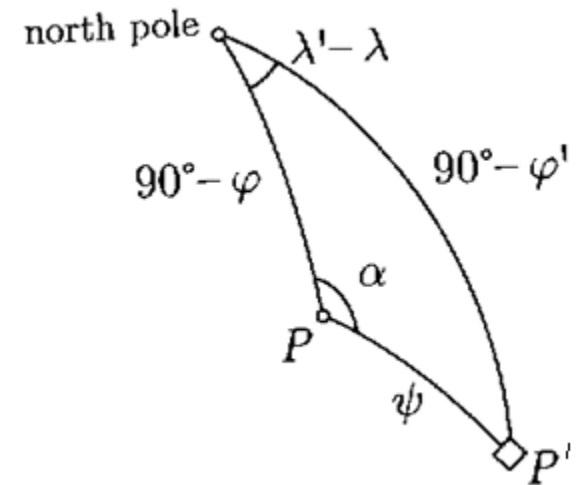
Dosadíme goniometrické funkcie v sférickom trojuholníku do príslušných diferencií a dostaneme

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\sin \psi} (\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)) = -\frac{1}{\sin \psi} \sin \psi \cos \alpha = -\cos \alpha$$

$$-\sin \psi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \cos \varphi \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\sin \psi} \cos \varphi \cos \varphi' \sin(\lambda' - \lambda) = -\frac{1}{\sin \psi} \sin \psi \sin \alpha \cos \varphi = -\cos \varphi \sin \alpha$$



Vening Meineszove vzorce

Dosadením upravených vzt'ahov

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\cos \alpha$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = -\cos \varphi \sin \alpha$$

do diferencií Stokesovej funkcie dostaneme

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \varphi} = -\frac{dS(\psi)}{d\varphi} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial S(\psi)}{\partial \lambda} = -\frac{dS(\psi)}{d\lambda} \cos \varphi \sin \alpha$$

Pre zložky zvislicovej odchýlky potom platia **Vening Meineszove vzorce**

$$\xi(\psi, \alpha) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \frac{dS(\psi)}{d\psi} \cos \alpha \sin \psi d\psi d\alpha$$

$$\eta(\psi, \alpha) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\pi} \Delta g(\psi, \alpha) \frac{dS(\psi)}{d\psi} \sin \alpha \sin \psi d\psi d\alpha$$



Derivácia Stokesovej funkcie

$$\frac{dS(\psi)}{d\psi} = \frac{\cos \frac{\psi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\psi}{2}} + 8 \sin \psi - 6 \cos \frac{\psi}{2} - 3 \frac{1 - \sin \frac{\psi}{2}}{\sin \psi} + 3 \sin \psi \ln \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \right)$$

Vo vzorcoch pre výpočet gravimetrických zvislicových odchýlok by sa malo integrovať po celom povrchu Zeme

S rastúcou sférickou vzdialenosťou ψ hodnoty Stokesovej aj Vening Meineszovej funkcie rýchlo klesajú

Obidve funkcie majú najväčšie hodnoty v blízkom okolí bodu, pre ktorý zložky zvislicových odchýlok z anomálii tiaže počítame. Preto sa výpočty robia pre zóny a výsledok je potom súčtom hodnôt určených v jednotlivých zónach

1. Centrálny zóna – najbližšie okolie bodu $\psi < 0,05^\circ$
2. Zóna do vzdialenosti $\psi = 10^\circ$
3. Ďaleká zóna $\psi > 10^\circ$



Znamienko mínus je v súlade s uhlovými zvislicovými odchýlkami, ktoré sa nazývajú astro-geodetické zvislicové odchýlky

$$\xi = \varphi' - \varphi$$

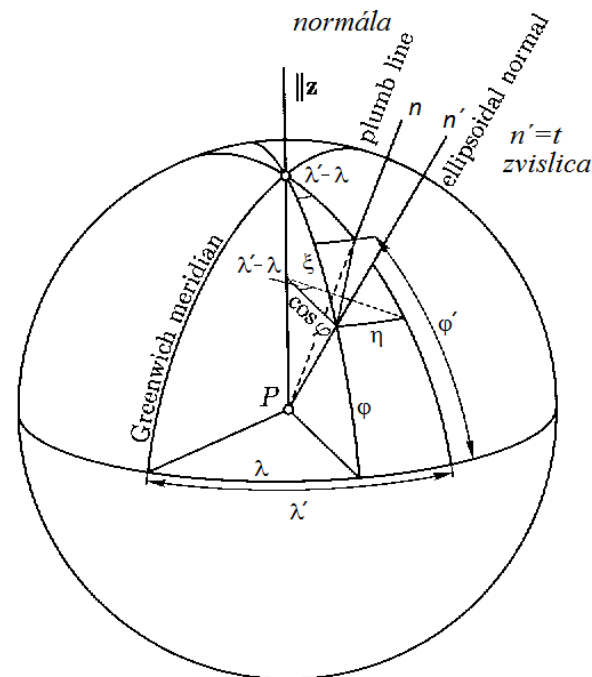
$$\eta = (\lambda' - \lambda) \cos \varphi$$

a znamená, že pri kladných hodnotách dN a ds sa znižuje geodetická šírka, príp. dĺžka.

V praxi sa Stokesove a Vening Meineszove integrály riešia ako sumačné vzťahy.

Povrchový element $d\sigma$ sa nahrádza malou plôškou q , ktorá vznikne rozdelením okolia bodu najčastejšie dvomi spôsobmi

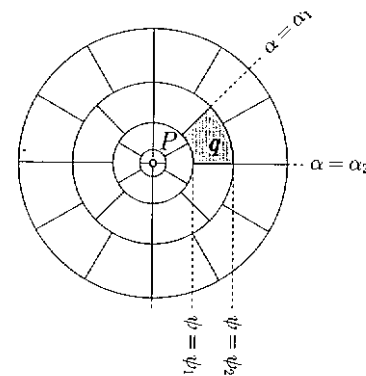
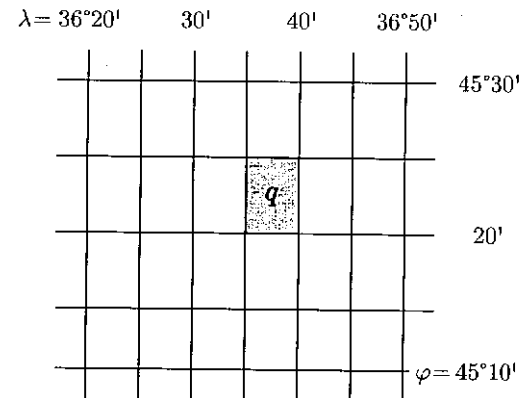
$$\iint_{\sigma} \dots d\sigma \approx \int_{\lambda'=0}^{2\pi} \int_{\varphi'=-\pi/2}^{\pi/2} \dots \cos \varphi' d\varphi' d\lambda'$$



Za predpokladu, že sa tiažové anomálie menia lineárne výpočet zvislicových odchýlok je založený na vytvorení „štvorcovej“ siete v okolí bodu P, v elipsoidickom súradnicovom systéme φ, λ

Ak predpokladáme nelineárne zmeny tiažových anomálií, výpočet sa realizuje po sústredných kružniciach s danými polomermi, zobrazenými na mape tiažových anomálií, v ktorých strede je bod P v polárnych súradniciach ψ, α .

Vytvorí sa elementárne plochy q , v ktorých sa vypočíta priemerná hodnota tiažovej anomálie. Pre každú plochu sa počítajú Stokesove a Vening Meineszove integrály



Pri výpočte geoidickej undulancie sa dosadí priemerná hodnota tiažovej anomálie

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_k \iint_q S(\psi) \Delta\bar{g} d\sigma = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_k \Delta\bar{g} \iint_q S(\psi) d\sigma$$

Ak nahradíme

$$c_k = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_q S(\psi) d\sigma$$

Dostaneme pre výšku geoidu zjednodušený tvar

$$N = \sum_k c_k \Delta\bar{g}$$

Ak je Stokesove funkcia konštantná v celej plôške q dostaneme pre substitučný člen po úpravách tvar

$$c_k = \frac{R}{4\pi\gamma} S(\psi) \iint_q d\sigma = \frac{S(\psi)}{4\pi\gamma R} \iint_q R^2 d\sigma = \frac{A_k S(\psi)}{4\pi\gamma R}$$

Integrál predstavuje plochu elementárnej plôšky q

$$A_k = \iint_q R^2 d\sigma$$

