3. ZÁKLADY VYROVNÁVACIEHO POČTU

3.1 ÚLOHY VYROVNÁVACIEHO POČTU

Merané veličiny akéhokoľvek druhu (v geodézii napr. dĺžky, uhly, plochy, čas atď.) sú zaťažené nevyhnutnými chybami. Meračské chyby majú pôvod v nedokonalosti ľudských zmyslových orgánov, v konštrukčnej nedokonalosti prístrojov a v poruchách ich chodu, ktoré spôsobujú atmosferické vplyvy (otrasy vetrom, krútenie stojanu atď.). Meranie tvorí základ geodetických, kartografických, stavebno-technických a mnohých ďalších prác, ktoré majú vysokú hodnotu. Pre každý meračský výkon musíme vedieť určiť presnosť merania. Ak sú známe požiadavky na presnosť výsledkov merania, volíme vhodné prístrojové vybavenie a optimálnu technológiu merania. Voľbou primeraných prístrojov, pomôcok a technológie merania vytvárame podmienky na splnenie vyžadovanej presnosti merania. Presnosť merania môžeme určiť len vtedy, ak sa jednotlivé veličiny odmerajú nezávisle viackrát, alebo sa odmeria viac veličín než je nutné na riešenie danej úlohy (nadbytočné merania). Existencia opakovaných (nadbytočných) meraní umožňuje vyrovnať merania metódami vyrovnávacieho počtu.

Úlohou vyrovnávacieho počtu je:

- určiť **kritériá** na vylúčenie nespoľahlivých meraní,
- z opakovaných (nadbytočných) meraní určiť **vyrovnanú hodnotu** ako najpravdepodobnejší odhad neznámej skutočnej hodnoty meranej veličiny,
- posúdiť **presnosť merania** a spoľahlivosť výsledkov merania.

Do vyrovnania sa nesmú zaradiť merania, ktoré sú zaťažené hrubými a systematickými chybami. Vyrovnávame len merania obsahujúce náhodné chyby.

Hrubé chyby vznikajú nepozornosťou pri meraní, napr. chyba v čítaní na prístroji, neurovnanie nivelačnej libely pred čítaním na late, nezapočítanie jednej dĺžky pásma atď. Hrubé chyby sa odstraňujú v priebehu merania opakovaním meračského výkonu.

Systematické chyby pôsobia jednostranne na výsledok merania, napr. kolimačná chyba, indexová chyba, nezvislé postavenie laty, nevodorovná poloha pásma pri meraní dĺžok atď. Systematické chyby sú nebezpečné z toho dôvodu, že vždy jednostranne ovplyvňujú výsledok merania. Odstraňujú sa kalibráciou pomôcok a prístrojov, rektifikáciou prístroja, voľbou vhodnej technológie merania, zavedením korekcie k meraniu podľa veľkosti systematickej chyby atď.

Náhodné chyby zostávajú vo výsledkoch meraní, v ktorých sa odstránili hrubé a systematické chyby. Sú nevyhnutné a účinkujú náhodne s kladným alebo záporným znamienkom. Príčiny ich vzniku sú v nedokonalých zmyslových schopnostiach merača, v ohraničenej presnosti meracieho prístroja a vo vonkajších podmienkach merania.

3.2 MOMENTOVÉ CHARAKTERISTIKY SÚBORU MERANÍ

Každej metóde merania pri rovnakej kvalite práce prislúcha určitý variačný obor možných výsledkov merania, alebo základný súbor chýb. Vykonané opakované merania predstavujú náhodne vybranú vzorku zo základného súboru meraní alebo základného súboru chýb. Šírka intervalu základného súboru chýb charakterizuje presnosť použitej metódy merania. Čím menšie sú vzájomné rozdiely odmeraných hodnôt, tým väčšia sa dá predpokladať presnosť a spoľahlivosť výsledkov merania.

Pre premenlivé a matematicky nepostihnuteľné podmienky merania je jednotlivý číselný výsledok merania náhodnou veličinou. Je odhadom skutočnej hodnoty meranej veličiny, ktorý môže v určitých hraniciach nadobúdať ľubovoľné a nepredvídané hodnoty.

Číselný súbor meraní $x_1, x_2, \ldots, x_n$, je pri veľkom počte meraní neprehľadný. V súbore meraní x_i
($i = 1, n$) je výsledok merania (odmeraná hodnota), n udáva rozsah štatistického súboru – počet meraní. Preto sa na základe tejto číselnej postupnosti definujú určité veličiny, ktoré zhŕňujú informácie o celom vyšetrovanom súbore a nazývajú sa charakteristiky. Najčastejšie sa používajú tzv. momentové charakteristiky.

Z daného súboru sa zisťujú dva druhy momentov:

- všeobecné momenty (momenty okolo počiatku),
- centrálne momenty (momenty okolo priemeru).

Všeobecný moment k-teho rádu meranej veličiny x je určený vzťahom

$$\mu'_{x,k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \ . \tag{3.1}$$

Všeobecný moment 1. rádu je jednoduchý aritmetický priemer (stredná hodnota), pre ktorý zavedieme označenie $\bar{x}$:

$$\mu'_{x,1} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \ . \tag{3.2}$$

Centrálny moment k-teho rádu meranej veličiny x je definovaný vzťahom:

$$\mu_{x,k} = \frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^k \ , \tag{3.3}$$

kde $n' = (n - 1)$ predstavuje počet nadbytočných meraní.

Druhý centrálny moment sa nazýva rozptyl, označíme ho σ_x^2 :

$$\mu_{x,2} = \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n'} \ . \tag{3.4}$$

Spravidla sa používa jeho druhá odmocnina (s kladným znamienkom) – smerodajná odchýlka σ_x, ktorú tiež označujeme s a nazývame **stredná** (kvadratická) odchýlka (štandard):

$$\sigma_x = s = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n'}} \ . \tag{3.5}$$

Aritmetický priemer $\bar{x}$ predstavuje najpravdepodobnejšiu (vyrovnanú) hodnotu meranej veličiny x. Stredná (kvadratická) odchýlka s vyjadruje stupeň koncentrácie výsledkov okolo strednej hodnoty $\bar{x}$.

Podľa zákona veľkých čísiel teoreticky platí, že

$$\lim_{n \to \infty} st. \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x} = X \ , \tag{3.6}$$

t.j. aritmetický priemer pri neohraničenom počte opakovaných meraní konverguje ku skutočnej hodnote meranej veličiny X.

3.3 KLASIFIKÁCIA CHÝB

Skutočná nevyhnutná chyba ε výsledkov merania je odchýlka odmeranej hodnoty x od skutočnej hodnoty meranej veličiny X :

$$\varepsilon_i = X - x_i \ . \tag{3.7}$$

Medzi poznateľné skutočné chyby patrí napr. chyba zo zaokrúhľovania, uhlový uzáver v trojuholníku a pod.

Skutočnú hodnotu meranej veličiny spravidla nepoznáme a prakticky sa nedá splniť ani požiadavka neohraničeného počtu opakovaných meraní. Potom odchýlka každého merania x_i od aritmetického priemeru $\bar{x}$ je chyba neskutočná a nazýva sa oprava v :

$$v_i = \bar{x} - x_i \ . \tag{3.8}$$

Opravy majú tú vlastnosť, že ich súčet je rovný nule:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0 \ . \tag{3.9}$$

Skutočnú chybu aritmetického priemeru vyjadruje vzťah:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = X - \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \ . \tag{3.10}$$

Smerodajnú odchýlku vypočítanú z veľkého počtu meraní vo vyrovnávacom počte nazývame **základná stredná chyba** a označujeme $\bar{m}$:

$$\bar{m} = \lim_{n \to \infty} st.s = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x_i)^2}{n'}} = \sqrt{\frac{\sum vv}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon\varepsilon}{n}} \ . \tag{3.11}$$

Zo štatistického hľadiska približne platí: $n \to \infty$, ak $n' > 25$. Ak $n' < 25$, vypočítanú hodnotu strednej chyby označujeme pojmom **empirická stredná chyba** a označujeme ju m. Charakterizuje presnosť jednotlivého merania na základe vyskytujúcich sa náhodných chýb a nemôžeme podať spoľahlivý výsledok o presnosti merania. Ak $n' < 25$ veličinu m^2 nazývame **variancia**.

Presnosť aritmetického priemeru charakterizuje stredná chyba aritmetického priemeru. Vypočíta sa zo vzťahu:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum vv}{n(n-1)}} \ . \tag{3.12}$$

<u>Príklad 3.1</u>

Dĺžka s bola meraná 12-krát oceľovým pásmom za rovnakých podmienok. Odmerané hodnoty sú:

Tabuľka 3.1

Meranie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
s [m]	131,46	,44	,45	,42	,49	,51	,43	,48	,50	,46	,41	,45	$\bar{x}$ =131,45$_8$ m

v	-0,2	+1,8	+0,8	+3,8	-3,2	-5,2	+2,8	-2,2	-4,2	-0,2	+4,8	+0,8	$\sum v$ =-0,4 mm
vv	0,04	3,24	0,64	14,44	10,24	27,04	7,84	4,84	17,64	0,04	23,04	0,64	$\sum vv$ =109,68

a z nich empirická stredná chyba jedného merania:

$$m = \sqrt{\frac{\sum vv}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{109{,}68}{11}} = 31{,}6 \approx 32 \quad \text{mm}$$

a stredná chyba aritmetického priemeru zo všetkých meraní je:

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum vv}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{109{,}68}{12.11}} = 9{,}1 \approx 9 \text{ mm.}$$

3.4 GAUSS-LAPLACEOVA FREKVENČNÁ KRIVKA

Závislosť veľkosti náhodných chýb na pravdepodobnosti ich výskytu matematicky definoval Gauss podľa normálneho rozdelenia rovnicou:

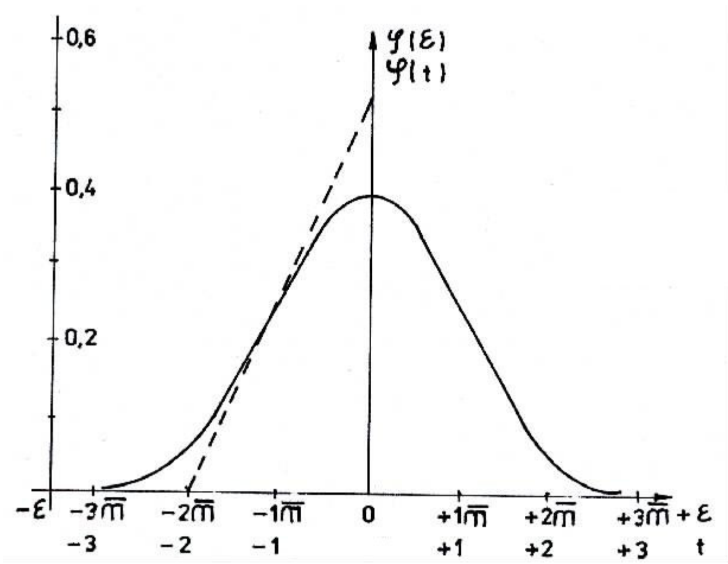
$$\varphi_{(\varepsilon)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \,. \tag{3.13}$$

V rovnici znamenajú:

$\varphi_{(\varepsilon)}$ - pravdepodobnosť výskytu chyby ε,

e - základ prirodzených logaritmov,

h - parameter presnosti v normálnom rozdelení.



Obr. 3.1. Gauss-Laplaceova frekvenčná krivka

Na obr. 3.1 je znázornená Gaussova zvonovitá krivka pre h = 1. Krivka sa asymptoticky blíži k ose X. Plocha obmedzená osou X a krivkou predstavuje úhrnnú pravdepodobnosť výskytu všetkých možných náhodných chýb. Vlastnosti náhodných chýb formuloval Gauss nasledovne:

a) pravdepodobnosť vzniku kladnej alebo zápornej chyby určitej veľkosti je rovnaká, t.j. počet kladných a záporných chýb vo veľkom súbore meraní je približne rovnaký,

b) malé chyby sú pravdepodobnejšie než chyby veľké,

c) chyby nad určitú hranicu sa nevyskytujú, pri prekročení tejto hranice ich klasifikujeme ako hrubé chyby.

3.4.1 Intervalové odhady výskytu chýb

Známa veľkosť základnej strednej chyby $\bar{m}$ umožňuje dopredu predpovedať výskyt chyby vo zvolenom intervale. Pravdepodobnosť výskytu chyby v symetrickom intervale vyjadrujeme všeobecným vzťahom $P(-t\ \bar{m} < \varepsilon < t\ \bar{m})$. Pre jednotlivé intervaly (obr. 3.1) je pravdepodnosť výskytu chýb nasledovná:

$$
\begin{aligned}
&P(-\ \bar{m} < \varepsilon < \ \bar{m}) = P(-1 < t < 1) = 68\ \%,\\
&P(-2\ \bar{m} < \varepsilon < 2\ \bar{m}) = P(-2 < t < 2) = 95\ \%,\\
&P(-2{,}5\,\bar{m} < \varepsilon < 2{,}5\,\bar{m}) = P(-2{,}5 < t < 2{,}5) = 99\ \%,\\
&P(-3\ \bar{m} < \varepsilon < 3\ \bar{m}) = P(-3 < t < 3) = 99{,}7\ \%\,.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

V rovniciach t predstavuje štandardnú (bezrozmernú) premennú, tzv. **konfidenčný koeficient**:

$$t = \frac{\varepsilon}{\bar{m}}\ .$$

Intervaly (3.14) majú názov intervaly konfidencie (spoľahlivosti) merania.

Ako ukazuje priebeh Gaussovej krivky, chyby nemôžu nadobúdať neohraničene veľké hodnoty. Za najväčšiu chybu $\varepsilon_{\max}$ v praxi považujeme dvoj- až trojnásobok základnej strednej chyby:

$$\varepsilon_{\max} = t\,\bar{m} = 2\ \bar{m}\ \text{až}\ 3\ \bar{m}\ .$$

Výskyt chyby mimo interval $\pm\varepsilon_{\max}$ má veľmi malú pravdepodobnosť (5% až 0,3 %) a takúto chybu už považujeme za chybu hrubú a vylučujeme ju zo súboru meraní.

Ak nie je známa hodnota základnej strednej chyby, odhad výskytu chyby vo zvolenom intervale sa uskutočňuje podľa Studentovho rozdelenia. Použitie Studentovho rozdelenia pri malom počte nadbytočných meraní ($n' = 1$ až 4) vedie k záverom, ktoré odporujú skúsenosti. Ak vyhodnocujeme merania, ktorých počet nadbytočných meraní je v intervale $5 < n' < 25$, za $\varepsilon_{\max}$ je možné približne považovať:

$$\varepsilon_{\max} = t_\alpha\, m = 2\ m\ \text{až}\ 2{,}5\ m\ .$$

Hodnoty konfidenčného koeficienta $t_\alpha = 2$ až 2,5 pre príslušné n' vyhľadáme v štatistických tabuľkách, keď sa použila hladina významnosti $\alpha = 100 - P = 5\ \%$.

<u>Príklad 3.2</u>

V príklade 3.1 sme vypočítali strednú hodnotu dĺžky z 12-tich opakovaných meraní: $\bar{x} = 131{,}45_8$ m a empirickú strednú chybu aritmetického priemeru $m_{\bar{x}} = 9$ mm. Aplikáciou Studentovho rozdelenia chýb zistíme napr. s 95 % pravdepodobnosťou, ($\alpha = 100 - P = 5\ \%$), v ktorom intervale sa nachádza skutočná hodnota meranej dĺžky. Z tabuľky 3.2 $t_\alpha = 2{,}2$, keď $n' = (n - 1) = 11$.

Skutočná hodnota meranej dĺžky má pravdepodobnosť výskytu v intervale:

$$(\bar{x} - t_\alpha\ m_{\bar{x}} < X < \bar{x} + t_\alpha\ m_{\bar{x}}),$$

t.j. skutočná hodnota môže nadobúdať hodnoty v intervale $131{,}44_0$ m < X < $131{,}47_6$ m, pričom najpravdepodobnejšia hodnota meranej dĺžky je $\bar{x} = 131{,}45_8$ m.

3.4.2 Skúška nulovej hypotézy

Interval spoľahlivosti v niektorých prípadoch slúži k rozhodnutiu, či vôbec existuje neznáma veličina ($X \neq 0$ napr. pohyb bodového poľa, posun stavby) a kedy je možná hypotéza $X = 0$.

Príkladom nech je opakované meranie bodového poľa na zosuvnom území. Opakované merania poskytujú rôzne výsledky vyrovnaných súradníc y, x, a H. Testuje sa hypotéza, či zmeny súradníc $|\Delta y| = |\Delta x| = |\Delta H| = 0$ (ďalej len $|\Delta| = 0$). V praxi sa používa zjednodušené pravidlo:

Kritické hodnoty Studentovho rozdelenia: t Tabuľka 3.2

Počet nadbytočných meraní $n = n - 1$	t_α			
	$\alpha = 100 - P$			
	10	5	2	1
1	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787

a) ak $|\Delta| \leq \overline{m}$, nemôžeme zamietnuť hypotézu, že $|\Delta| = 0$,

b) b) pri $\overline{m} < |\Delta| \leq 2\overline{m}$ je možné pochybovať o platnosti hypotézy $|\Delta| = 0$ a je možné pripustiť pohyb s 32 % až 5 % rizikom chybného rozhodnutia,

c) pri $|\Delta| > 2\ \overline{m}$ je možné pochybovať o platnosti nulovej hypotézy a sme prakticky presvedčený
o pohybe. Pracujeme pri tom s 5 % rizikom nesprávnosti zamietnutia hypotézy.